УДК 621.391

Ю.М. Коршунов

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА "ПОРЧИ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ" НА ОСНОВЕ АППАРАТА ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Рассмотрено построение модели процесса "порчи и восстановления" на основе теории Марковских цепей. Метод реализован в виде программы в пакете MATLAB. Приведены примеры решения практических задач

Рассматривается система, в которой может находиться n однотипных объектов, наблюдение за которыми ведется в дискретные моменты времени t_i, $i = 0,1,\cdots$, отделенные друг от друга одинаковыми интервалами, называемыми шагами. Каждый объект может находиться в двух состояниях: $1 -$ объект исправен, $0 -$ объект неисправен. На каждом шаге объект может случайным образом переходить из одного состояния в другое. С вероятностью p исправный объект может остаться в исправном состоянии, а с вероятностью $\overline{p} = 1 - p$ перейти в неисправное состояние. С вероятностью q неисправный объект будет отремонтирован и перейдет в исправное состояние, а с вероятностью $\overline{q} = 1 - q$ останется в неисправном состоянии. Вероятности перехода объекта из одного состояния в другое можно компактно записать в виде ***матрицы переходов***

$$A = \begin{bmatrix} p\ \overline{p} \\ q\ \overline{q} \end{bmatrix}.$$

Общая длительность процесса не ограничена. На начальном шаге t_0 считаем все объекты исправными.

В поставленной задаче, называемой задачей "***порчи и восстановления***", представляет интерес характер изменения состояния системы (количество исправных и неисправных объектов) с течением времени, а также состояние системы в установившемся режиме, если такой существует.

В [1] приводится модель, решающая поставленную задачу методом Монте-Карло и позволяющая получить оценку среднего числа исправных станков на достаточно длинной последовательности шагов. Однако медленная сходимость методов Монте-Карло и требование большого числа повторений для получения более или менее надежных результатов делают актуальным поиск иных методов решения. Аппарат цепей Маркова [2, 3] является одним из таких методов.

Введем в рассмотрение множество V возможных состояний системы

$$V = \{v_0, v_1, \cdots, v_n\},$$

где $v_i = n - i -$ состояние системы с i неисправными объектами.

Введем также в рассмотрение вероятности P_{kl} перехода системы на текущем шаге из состояния v_k с k неисправными объектами в состояние v_l с l неисправными объектами. Полная совокупность элементов P_{kl}, $k = \overline{0,n}$, $l = \overline{0,n}$ образует матрицу вероятностей переходов системы из одного состояния в другое

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} \cdots P_{0n} \\ \cdots \\ P_{n0} \cdots P_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

в которой вероятности переходов должны удовлетворять условию

$$\sum_{j=0}^{n} P_{ij} = 1, \ i = \overline{1,n}.$$

При подсчете вероятности P_{kl} удобно воспользоваться методом подсчета вероятностей при биномиальном распределении.

Рассмотрим случайную выборку объема n, элементы которой могут принимать только значения 0 и 1, и обозначим через p вероятность, с которой элемент выборки принимает значение 1. Тогда вероятность того, что в выборке объема n появится ровно r единиц, будет равна

$$w(r,n,p) = C_n^r p^r (1-p)^{n-r}, \qquad (2)$$

где

$C_n^r = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!} -$ число сочетаний из n элементов по r.

Рассмотрим получение вероятности перехода P_{kl} при $k \geq l$. Исходная выборка содержит $n-k$ единиц и k нулей, а измененная выборка содержит $n-l$ единиц и l нулей. Перевод исходной выборки в измененную может быть осуществлен различными способами. Зададимся некоторым значением i. Если $k \geq l$, то мы можем i единиц из $n-k$ единиц исходной выборки перевести в нули, а из k нулей $k-l+i$ перевести в единицы. При этом значение i должно удовлетворять условиям

$$i \leq n-k, \quad i \leq l$$

или

$$i = \overline{0, i_{\max}}, \quad i_{\max} = \min(n-k, l).$$

Воспользовавшись формулой биномиального распределения (2), находим

$$P_{kl} = \sum_{i=0}^{i_{\max}} w(i, n-k, \overline{p}) w(k-l+i, k, q) =$$
$$= \sum_{i=0}^{i_{\max}} C_{n-k}^{i} \overline{p}^{i} p^{n-k-i} C_{k}^{k-l+i} q^{k-l+i} \overline{q}^{l-i}.$$

Если при вычислении P_{kl} имеет место $k \leq l$, то преобразование k нулей в исходном состоянии в $l \geq k$ в измененном состоянии можно осуществить, если задаться числом i и преобразовать в нули $l-k+i$ единиц из $n-k$ исходных и сохранить $k-i$ нулей из k исходных. При этом должны выполняться условия

$$l-k+i \leq n-k, \text{ т.е. } i \leq n-l,$$
$$k-i \geq 0, \text{ т.е. } i \leq k.$$

Более удобная запись этих условий будет

$$i = \overline{0, i_{\max}}, \quad i_{\max} = \min(n-l, k).$$

В этом случае вероятность P_{kl} найдется из соотношения

$$P_{kl} = \sum_{i=0}^{i_{\max}} w(l-k+i, n-k, \overline{p}) w(k-i, k, \overline{q}) =$$
$$= \sum_{i=0}^{i_{\max}} C_{n-k}^{l-k+i} \overline{p}^{l-k+i} p^{n-l-i} C_{k}^{k-i} \overline{q}^{k-i} q^{i}.$$

До сих пор предполагалось, что все k неисправных объектов в исходном состоянии могут перейти в исправное состояние независимо от их количества. Однако в реальных системах на это предположение накладывается ограничение, определяемое числом работников (мастеров), занимающихся ремонтом неисправных объектов. В связи с этим будем считать, что имеется u мастеров, каждый из которых на очередном шаге ремонтирует только один объект и делает его исправным с вероятностью q. Все остальные условия оставим прежними.

Считаем, что на текущем такте из $n-k$ исправных объектов j стали неисправными, а из k неисправных объектов u мастеров исправили i объектов. При этом на j и на i должны быть наложены ограничения. Число j не должно превышать числа исправных объектов, т.е. $j \leq n-k$. Число i не должно превышать числа мастеров, т.е. $i \leq u$. При этом $l = k + j - i$. В более удобном виде эти ограничения запишутся как

$$k = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, j_{\max}}, \quad j_{\max} = n-k,$$
$$i = \overline{0, i_{\max}}, \quad i_{\max} = \min(u, k), \quad l = k + j - i. \tag{3}$$

Если условия (3) выполнены, то значения P_{kl} найдутся следующим образом:
если $k \leq u$, то

$$P_{kl} = w(j, n-k, \overline{p}) w(i, k, q) =$$
$$= \sum_{j=0}^{j_{\max}} \sum_{i=0}^{i_{\max}} C_{n-k} \overline{p}^{j} p^{n-k-j} C_{k}^{i} q^{i} \overline{q}^{k-i},$$

если же $k > u$, то

$$P_{kl} = w(j, n-k, \overline{p}) w(i, u, q) =$$
$$= \sum_{j=0}^{j_{\max}} \sum_{i=0}^{i_{\max}} C_{n-k} \overline{p}^{j} p^{n-k-j} C_{u}^{i} q^{i} \overline{q}^{u-i}.$$

Если условия (3) не выполняются, то следует положить $P_{kl} = 0$.

Наряду с матрицей переходов P, важную роль играет вектор

$$\pi^{(t)} = (\pi_0^{(t)}, \cdots, \pi_n^{(t)}), \tag{4}$$

определяющий вероятности состояний v_i на векторе состояний V на шаге t, элементы которого $\pi_i^{(t)}$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=0}^{n} \pi_i^{(t)} = 1.$$

Знание матрицы переходов P и вектора вероятностей состояний $\pi^{(t)}$ позволяет определить характер изменения состояния системы на шаге t, т.е. осуществить переход от вектора $\pi^{(t)}$ к вектору $\pi^{(t+1)}$, реализуемому по соотношению

$$\pi^{(t+1)} = \pi^{(t)} P. \tag{5}$$

Будем считать, что на начальном шаге при $t = 0$ все объекты находились в исправном состоянии, т.е. $\pi^{(0)} = (1\,0 \cdots 0)$. Тогда по соотношению (5) можем последовательно находить $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \cdots$, т.е. исследовать характер переходного процесса – изменение вектора состояний на последовательности тактов.

Наибольший интерес представляет работа системы по окончании переходного процесса, т.е. в установившемся режиме. Однако многократное применение соотношения (5) для нахождения установившегося режима представляется неудобным.

Можно поступить иначе. Учитывая, что в установившемся режиме вектор $\pi^{(t)}$ не изменяется при переходе к следующему шагу, т.е.

$\pi^{(t+1)} = \pi^{(t)}$, можно не указывать номер шага t и обозначить через π вектор вероятностей состояния системы в установившемся режиме. При этом соотношение (5) запишется в виде

$$\pi = \pi P, \tag{6}$$

где $\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_n)$.

Уравнение (6) представляет собой систему $n+1$ линейных уравнений с $n+1$ неизвестными $\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_n$. Однако величины π_i не являются независимыми, так как должны удовлетворять соотношению

$$\sum_{i=0}^{n} \pi_i = 1. \tag{7}$$

Заменяя в системе (6) одно из уравнений на уравнение (7) и решая полученную систему уравнений, находим интересующий нас вектор π.

Еще более простой способ определения вектора π основан на свойствах матрицы переходов P. В теории Марковских цепей показано, что вектор π является главным собственным вектором транспонированной матрицы переходов P^T.

Имея в своем распоряжении векторы $v = (v_0, \cdots, v_n)$, где $v_i = n - i$ и $\pi = (\pi_0, \cdots, \pi_n)$, можем определить некоторые числовые параметры, характеризующие работу системы в установившемся режиме.

Среднее число работоспособных объектов $\bar{v}$ найдем как оценку математического ожидания значений v_i

$$\bar{v} = \sum_{i=0}^{n} v_i \pi_i. \tag{8}$$

Оценка дисперсии σ_v^2 для числа работоспособных станков найдется как

$$\sigma_v^2 = \sum_{i=0}^{n} (v_i - \bar{v})^2 \pi_i. \tag{9}$$

Исследование интересующей нас системы с помощью описанной модели следует проводить многократно при разных значениях необходимого числа объектов n, различном числе мастеров u и различной квалификации мастера q. Если создан критерий оценки качества работы системы, то из множества рассмотренных вариантов можно выбрать наиболее приемлемый.

Описанная модель была реализована на кафедре АИТУ в пакете MATLAB. Приведем несколько простых примеров работы программы.

Пример 1. $n = 5,\ p = 0.95,\ q = 0.6,\ u = 1.$

Матрица переходов

0.7738 0.2036 0.0214 0.0011 0.0000 0.0000
0.4887 0.4287 0.0767 0.0057 0.0002 0.0000
0 0.5144 0.4242 0.0584 0.0029 0.0001
0 0 0.5415 0.4180 0.0395 0.0010
0 0 0 0.5700 0.4100 0.0200
0 0 0 0 0.6000 0.4000

Строчные суммы

1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000

Переходный процесс

$\pi^{(0)}$ = (1.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000)
число работающих объектов $\bar{v}$ =5.00
$\pi^{(1)}$ =(0.774 0.204 0.021 0.001 0.000 0.000)
число работающих объектов $\bar{v}$ =4.75
$\pi^{(2)}$ = (0.698 0.256 0.042 0.004 0.000 0.000)
число работающих объектов $\bar{v}$ =4.6482
$\pi^{(3)}$ =(0.665 0.273 0.054 0.006 0.000 0.000)
число работающих ообъектов $\bar{v}$ =4.5969

Установившийся режим

π =(0.623 0.289 0.074 0.013 0.001 0.000)
$\bar{v}$ =4.5194 σ_v^2 =0.49276

В дальнейших примерах рассматривается работа системы только в установившемся режиме.

Пример 2. $n = 5,\ p = 0.95,\ q = 0.6,\ u = 2.$
π =(0.668 0.279 0.048 0.005 0.000 0.000)
$\bar{v}$ =4.6107 σ_v^2 =0.36355

Пример 3. $n = 5,\ p = 0.95,\ q = 0.6,\ u = 3.$
π =(0.670 0.279 0.047 0.004 0.000 0.000)
$\bar{v}$ =4.6152 σ_v^2 =0.3554

Пример 4. $n = 5,\ p = 0.95,\ q = 0.9,\ u = 1.$
π =(0.739 0.228 0.031 0.002 0.000 0.000)
$\bar{v}$ =4.7029 σ_v^2 =0.28595

Из сравнения примера 4 с примерами 2, 3 видно, что использование мастера высокой квалификации является более эффективной мерой улучшения качества работы системы, чем использование двух или трех мастеров низкой квалификации.

Библиографический список

1. *Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М.* МАТЛАБ 6.х.: программирование численных методов. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 672 с.
2. *Тихонов В.И.,Миронов М.В.* Марковские процессы. М.:Сов. Радио, 1977. 486 с.
3. *Коршунов Ю.М.* Математические основы кибернетики. М.: Энергоатомиздат, 1987. 482 с.