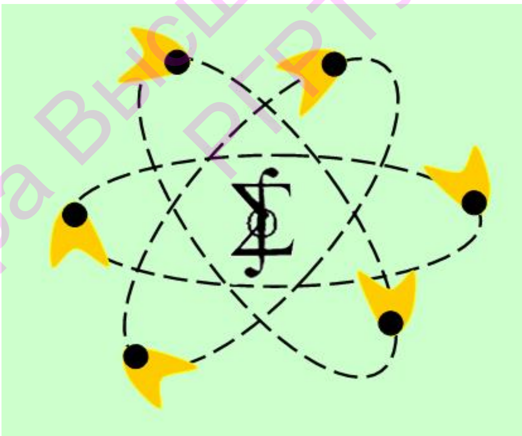
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.П. КАРАСЁВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА



Рязань 2016

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

И.П. КАРАСЁВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие
(типовой расчёт с методическими указаниями)

Рязань 2016

УДК 512.64

Линейная алгебра: учеб. пособие (типовой расчёт с методическими указаниями) / И.П. Карасёв; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2016. – 52 с.

Содержит типовые расчеты по линейной алгебре в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования.

Предназначено для студентов направления 18.03.01 «Химическая технология», а также для студентов всех направлений и специальностей, изучающих линейную алгебру.

Ил. 9. Библиогр.: 7 назв.

Определитель, матрица, минор, алгебраическое дополнение, метод Гаусса

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой, доц., канд. физ.-мат. наук К.В. Бухенский)

ЗАДАЧИ НУЛЕВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$: 1) по правилу треугольников;

2) по правилу Саррюса;
3) разложением по строке (столбцу).

Задание 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задание 3. Даны две квадратные матрицы A и B 3-го порядка $\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Найти: 1) $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$; 2) показать, что $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1}$.

Задание 4. Решить СЛАУ $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = -4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ -2x_1 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

а) по правилу Крамера;

б) с помощью обратной матрицы;

в) методом Гаусса;

г) методом Гаусса в матричной форме;

д) модифицированным методом Жордана – Гаусса.

Задание 5. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -7, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

а) методом Гаусса;
б) методом Гаусса в матричной форме;
в) модифицированным методом Жордана – Гаусса.

Задание 1

1.1. Краткие теоретические сведения

Определение 1. Определителем 3-го порядка, соответствующим квадратной матрице 3-го порядка

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

называется число, обозначаемое $|\mathrm{A}|$ или Δ и равное

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1.1)$$

Удобней пользоваться формулой (1.1), если применять правило треугольников или правило Саррюса.

Правила треугольников. Определитель $|\mathrm{A}|$ 3-го порядка равен сумме произведений элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, и *минусу* произведений элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали (рис. 1).

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

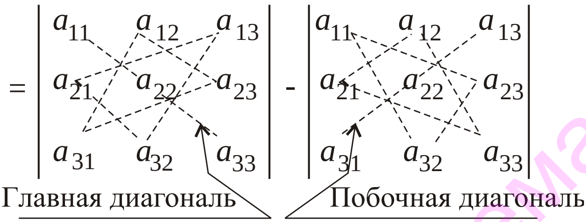


Рис. 1

Правило Саррюса. Образуем матрицу размером 3×5, у которой первые три столбца составлены из матрицы A, а 4-й и 5-й столбцы – это первые два столбца матрицы A (рис.2).

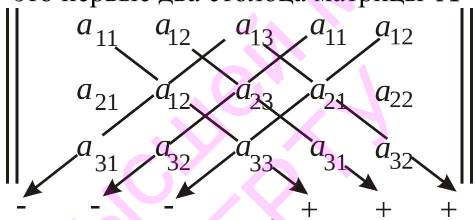


Рис. 2

Затем перемножаем элементы этой матрицы в соответствии со схемой рис. 2 для получения слагаемых формулы (1.1).

Определение 1.2. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя n-го порядка *вычёркиванием* i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Определение 1.3. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется число, равное минору M_{ij} этого элемента, если сумма индексов $(i+j)$ – чётное число, и минору со знаком минус, если $(i+j)$ – нечётное число.

Таким образом, для любого элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ определителя имеет место соотношение

$$a_{ij} \sim A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} . \tag{1.2}$$

П р и м е р 1. Вычислить минор M_{12} и M_{22} и соответствующие им алгебраические дополнения A_{12} и A_{22} определителя 4-го порядка:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} .$$

*Решение. М*иноры M_{12} и M_{22} соответствуют элементам определителя a_{12} и a_{22}:

$a_{12} = 2 \sim M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ |вычисляем по правилу треугольников| $= -2\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 0 + 3(-1)0 - 0\cdot 2\cdot 0 - 3\cdot 3\cdot 2 -$

$$-(-2)\cdot(-1)\cdot 1 = -8 - 18 - 2 = -28;$$

по формуле (1.2) найдём алгебраическое дополнение этого элемента: $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(-28) = 28$.

$$a_{22} = 1 \sim M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 0 + 4\cdot 3\cdot(-1) - 4\cdot 2\cdot 0 -$$

$$-3\cdot 3\cdot 2 - (-1)\cdot 1\cdot 1 = 4 + 0 - 12 - 0 + 1 = -25;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -25.$$

Ответ: $M_{12} = -28$, $A_{12} = 28$; $M_{22} = -25$, $A_{22} = -25$.

Определение 1.4. Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов 1-й строки определителя на соответствующие этим элементам алгебраические дополнения:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\,. \qquad (1.3)$$

Вычисление определителя по формуле (1.3) называется *разложением определителя* n-го порядка по 1-й строке.

Определитель n-го порядка можно разложить по любой строке или любому столбцу.

$|\mathrm{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ – разложение определителя по i-й строке, где $i = 1, 2, \ldots, n$ (кратко записывают $i = \overline{1, n}$);

$|\mathrm{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$, $j = \overline{1, n}$, – разложение определителя по j-му столбцу.

П р и м е р 2. Вычислить определитель.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$|разложим определитель по 1-й строке|$= 1\cdot A_{11} + 3\cdot A_{12} + 4\cdot A_{13} = 1\cdot M_{11} - 3\cdot M_{12} + 4\cdot M_{13} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$|определитель 2-го порядка вычисляется по формуле: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$|$=$

$$= 2\cdot 2 - 1\cdot(-1) - 3(3\cdot 2 - 1\cdot 0) + 4(3\cdot(-1) - 2\cdot 0) =$$
$$= 4 + 1 - 18 - 12 = -25.$$

Вычислим тот же определитель разложением по 1-му столбцу:

$$\Delta = 1\cdot A_{11} + 3\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} = M_{11} - 3\cdot M_{21} + 0\cdot M_{31} =$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 5 - 3\cdot 10 = -25.$$

Ответ: $\Delta = -25$.

Очевидно, что вычисление определителя по 1-му столбцу произвести быстрее, чем вычисление по 1-й строке, так как число реальных слагаемых (т.е. слагаемых, отличных от нуля) меньше на единицу.

Оказывается, что существует свойство определителя (см., например, [6]: свойство 8 п.2.3.2), позволяющее получать нули в некоторой строке (столбце), не изменяя определителя.

Свойство. Если к элементам некоторой строки (некоторого столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (другого столбца), умноженные на любое число λ, то определитель не изменится.

Решим предыдущий пример.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \leftarrow \\ \end{matrix} =$$ |прменяя свойство, получаем ещё один нуль в 1-м столбце, кружочек означает умножение элементов 1-й строки на (-3), а затем стрелочка показывает, что к элементам 2-й строки нужно прибавить соответствующие новые числа| $= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -11 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ |, разлагаем определитель по элементам 1-го столбца| $= 1\cdot A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} -7 & -11 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= (-7)\cdot 2 - (-11)\cdot(-1) = -25.$$

1.2. Решение первого задания нулевого варианта

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$:

1) по правилу треугольников:

$$\Delta = 1\cdot 1\cdot 2+(-2)\cdot(-3)\cdot 0+2\cdot 1\cdot 3-(-2)\cdot 2\cdot 2-(-3)\cdot 1\cdot 1=$$
$$=2+0+6-0+8+3=19;$$

2) по правилу Саррюса:

$$\left\|\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right\| \to$$

$-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$

$$\Delta = 1\cdot 1\cdot 2+$$
$$+(-2)\cdot(-3)\cdot 0+$$
$$+3\cdot 2\cdot 1-3\cdot 1\cdot 0-$$
$$-1\cdot(-3)\cdot 1-(-2)\cdot 2\cdot 2=$$
$$=2+6+3+8=19;$$

3) разложением по столбцу (строке):

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |$разложим определитель по элементам 3-й строки$| = 0\cdot A_{31}+1\cdot A_{32}+2\cdot A_{33} = -1\cdot M_{32}+2\cdot M_{33}=$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-3-6)+2(1+4)=9+10=19.$$

Задание 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Согласно определению 1.4, определитель можно разложить по 1-й строке. Получим пять определителей 4-го порядка, которые сводятся к определителям 3-го порядка, и определители 3-го порядка, в свою очередь, вычисляются через определители 2-го порядка. Очевидно, что процесс вычисления определителей больших размеров получается трудоёмким.

Следует заметить, что разложение того же определителя по 5-й строке (или по 2-му столбцу) будет содержать четыре определителя 4-го порядка, так как один элемент 5-й строки (второго столбца) равен нулю.

Применяя свойство, можно получить четыре нуля в какой-то строке (или столбце) и вычислять только один определитель 4-го порядка. Но и его, применяя свойство, можно свести к одному определителю 3-го порядка, который, в свою очередь, можно привести, используя свойство, к одному определителю 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc .$$

Решение примера задания 2

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$=|$применяем свойство 8, все преобразования удобнее провести в целых числах. Если в определителе имеется элемент, равный ± 1, то его можно умножать на подходящие числа такие, чтобы в строке (столбце), содержащей элемент ± 1, получить нули. Если в строках (столбцах) нет единиц, то, применяя свойство, можно выполнять преобразования в целых числах. В данном примере имеются единицы, например, $a_{11} = 1$. Рядом в 1-й строке (1-м столбце), применяя свойство, можно получить нули. Например, умножая элементы 1-й строки на подходящие числа, получаем нули в 1-м столбце$| =$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 & 1 & 4 \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 11 & 16 & 6 & 6 \end{vmatrix} =$$

=|разлагаем определитель по 1-му столбцу| $=1\cdot A_{11}=M_{11}=$

$$=\begin{vmatrix} -7 & -6 & -3 & 1 \\ -6 & -10 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 4 & 2 \\ 11 & 16 & 6 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & -2 & -6 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} -7 & -6 & -3 & 1 \\ 8 & 2 & 4 & 0 \\ 18 & 19 & 10 & 0 \\ 53 & 52 & 24 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{14}=(-1)^{1+4}M_{14}=-M_{14}=$$

$$=-\begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 18 & 19 & 10 \\ 53 & 52 & 24 \end{vmatrix} =$$ |общий множитель во всех элементах строки (столбца) можно вынести за знак определителя (см. свойство 4 п. 2.3.2 пособия [6]|=

$$= -2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 18 & 19 & 10 \\ 53 & 52 & 24 \end{vmatrix} \begin{matrix} -19 & -52 \\ & \\ & \end{matrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -58 & 0 & -28 \\ -155 & 0 & -80 \end{vmatrix} =$$

$$= -2A_{12} = 2M_{12} = 2\begin{vmatrix} -58 & -28 \\ -155 & -80 \end{vmatrix} = 2(-2)\cdot(-5) = \begin{vmatrix} 29 & 14 \\ 31 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= 20(464 - 434) = 600.$$

Ответ: 600.

Задание 3

Даны две квадратные матрицы A и B 3-го порядка

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Найти: 1) $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$, 2) показать, что $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.

3.1. Краткие теоретические сведения

Определение 3.1. Произведением матрицы A размером $m \times s$ на матрицу B размером $s \times n$ называется матрица C размером $m \times n$, элементы которой c_{ij} вычисляются по формулам:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}. \qquad (3.1)$$

Формула (3.1) показывает, что умножение двух матриц возможно тогда и только тогда, когда *число столбцов* в первом множителе (матрица A) равно *числу строк* во втором множителе (это матрица B). Обозначение $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$.

Например, для получения c_{11} матрицы C находится сумма произведений элементов 1-й строки матрицы A на соответствующие элементы 1-го столбца матрицы B:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \ldots + a_{1s}b_{s1}.$$

Аналогично $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots + a_{1s}b_{s2}$, …,

$$c_{mn} = a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \ldots + a_{ms}b_{sn}\,.$$

Если же число столбцов матрицы A не равно числу строк матрицы B, то $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$ не существует.

П р и м е р 1. Найти $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$, если

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \mathrm{B} = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Решение. Число столбцов матрицы A равно трём , число строк матрицы B тоже равно трём, следовательно, произведение $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$ существует:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix} = \mathrm{C} = \left\| c_{ij} \right\| \text{ размером } 2\times 2\,.$$

$c_{11} = 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 3 = 8$, $\quad c_{12} = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 8$,

$c_{21} = 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 3 = 6$, $\quad c_{22} = 0\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 = 0$.

Таким образом, $\mathrm{C} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{B} = \begin{Vmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 0 \end{Vmatrix}$.

Ответ: $\begin{Vmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 0 \end{Vmatrix}$.

Найдите $\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}$, если это возможно.

Определение 3.2. Квадратная матрица A называется ***невырожденной* (*неособенной*)**, если её определитель $|\mathrm{A}| \neq 0$.

Определение 3.3. Квадратная матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если $\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{E}$, где E – единичная квадратная матрица.

Теорема. *Если квадратная матрица* $\mathbf{A}$ *– невырожденная, то обратная матрица* A^{-1} *существует и вычисляется по формуле*

$$\mathrm{A}^{-1} = \left\| a_{ik}^{-1} \right\| = \frac{1}{|\mathrm{A}|} \left\| A_{ki} \right\|, \qquad (3.2)$$

где A_{ki} – алгебраическое дополнение элемента a_{ki} матрицы A.

П р и м е р 2. Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Решение. 1. Найдём определитель $|\mathrm{A}|$.

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 12 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} =$$

-1

1

$$= M_{11} = \begin{vmatrix} -6 & 12 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Следовательно, матрица A невырожденная и имеет обратную матрицу.

2. Построим матрицу $\left\| \mathrm{A}_{ik} \right\|$ алгебраических дополнений элементов a_{ik} матрицы A.

$$5 \sim A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \; -1 \sim A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$7 \sim A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \; 3 \sim A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$2 \sim A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -12,$$

$$-2\sim A_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-6,$$

$$1\sim A_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 7\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-12,$$

$$1\sim A_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}5 & 7\\ 3 & -2\end{vmatrix}=31,$$

$$-1\sim A_{33}=M_{33}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=13.$$

$$\left\|\mathrm{A_{ik}}\right\|=\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 1\\ 6 & -12 & -6\\ -12 & 31 & 13\end{matrix}\right\|.$$

3. Транспонируем матрицу $\left\|\mathrm{A_{ik}}\right\|$. Получим матрицу $\left\|\mathrm{A}_{ki}\right\|=\tilde{\mathrm{A}}=\left\|\begin{matrix}0 & 6 & -12\\ 1 & -12 & 31\\ 1 & -6 & 13\end{matrix}\right\|$, которая называется *присоединённой* матрицей.

4. Обратная матрица

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{6}\tilde{\mathrm{A}}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}0 & 6 & -12\\ 1 & -12 & 31\\ 1 & -6 & 13\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}0 & 1 & -2\\ \frac{1}{6} & -2 & \frac{31}{6}\\ \frac{1}{6} & -1 & \frac{13}{6}\end{matrix}\right\|.$$

5. Проверка $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}0 & 6 & -12\\ 1 & -12 & 31\\ 1 & -6 & 13\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}5 & -1 & 7\\ 3 & 2 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{matrix}\right\|=$

$$=\frac{1}{6}\begin{Vmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}=\mathrm{E}\,.$$

Самостоятельно проверьте, что $\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{E}$.

Ответ: $\mathrm{A}^{-1}=\begin{Vmatrix}0 & 1 & -2\\ \frac{1}{6} & -2 & \frac{31}{6}\\ \frac{1}{6} & -1 & \frac{13}{6}\end{Vmatrix}$.

3.2. Решение задания 3 нулевого варианта

1. $$\mathrm{BA}=\frac{1}{6}\begin{Vmatrix}2 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 1\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}2\cdot-2+3\cdot0+2\cdot0 & 2\cdot1+3\cdot2+2\cdot3 & 2\cdot(-1)+3\cdot4+2\cdot1\\ (-1)(-2)+0\cdot0+1\cdot0 & (-1)\cdot1+0\cdot2+1\cdot3 & (-1)\cdot(-1)+0\cdot4+1\cdot1\\ 2\cdot(-2)+1\cdot0+(-1)\cdot0 & 2\cdot1+1\cdot3+(-1)\cdot3 & 2\cdot(-1)+1\cdot4+(-1)\cdot1\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}-4 & 14 & 12\\ 2 & 2 & 2\\ -4 & 1 & 1\end{Vmatrix}.$$

2. Показать, что $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{-1}=\mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{-1}$.

Решение: 1. Найдём $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{-1}$.

$$C=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\begin{Vmatrix}-4 & 14 & 12\\ 2 & 2 & 2\\ -4 & 1 & 1\end{Vmatrix}.$$

Определитель $|C|=\begin{vmatrix}-4 & 14 & 12\\ 2 & 2 & 2\\ -4 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 1\\ -4 & 1 & 1\end{vmatrix}=$

$$=4\begin{vmatrix}-2 & 9 & 8\\ 1 & 0 & 0\\ -4 & 5 & 5\end{vmatrix}=4\cdot A_{21}=-4M_{21}=-4\begin{vmatrix}9 & 8\\ 5 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=-4(45-40)=-20\neq 0.$$

Матрица алгебраических дополнений

$$\|C_{ik}\|=\begin{Vmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{Vmatrix},$$

$-4\sim C_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$, $14\sim C_{12}=-M_{12}=-10$,

$12\sim C_{13}=M_{13}=10$, $2\sim C_{21}=-M_{21}=-2$, $2\sim C_{22}=M_{22}=44$,

$2\sim C_{23}=-M_{23}=-52$, $-4\sim C_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix}14 & 12\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4$,

$1\sim C_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}-4 & 12\\ 2 & 2\end{vmatrix}=32$, $1\sim C_{33}=M_{33}=-36$.

Присоединённая матрица

$$\tilde{C}=\|C_{ki}\|=\begin{Vmatrix}0 & -2 & 4\\ -10 & 44 & 32\\ 10 & -52 & -36\end{Vmatrix},$$

$$C^{-1}=(AB)^{-1}=-\frac{1}{20}\begin{Vmatrix}0 & -2 & 4\\ -10 & 44 & 32\\ 10 & -52 & -36\end{Vmatrix}.$$

2. Найдём $B^{-1}A^{-1}$.

Решение. B^{-1} и A^{-1} – обратные к матрицам

$$B=\begin{Vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 1\end{Vmatrix} \text{ и } A=\begin{Vmatrix}2 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{Vmatrix}.$$

Определители $|B|$ и $|A|$:

$$|B|=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=-2A_{11}=-2M_{11}=-2\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=20,$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot A_{21}=M_{21}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1.$$

Следовательно, матрицы A и B невырожденные, их обратные матрицы существуют.

$B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\tilde{B}$, $\tilde{B}=\|B_{ki}\|$ – присоединённая матрица.

$$-2\sim B_{11}=M_{11}=-10,\ 1\sim B_{12}=-M_{12}=0,\ -1\sim B_{13}=M_{13}=0,$$

$$0\sim B_{21}=-M_{21}=-4,\ 2\sim B_{22}=M_{22}=-2,\ 4\sim B_{23}=-M_{23}=6,$$

$$0\sim B_{31}=M_{31}=6,\ 3\sim B_{32}=-M_{32}=8,\ 1\sim B_{33}=M_{33}=-4.$$

$$\tilde{B}=\begin{Vmatrix}B_{11} & B_{21} & B_{31}\\ B_{12} & B_{22} & B_{32}\\ B_{13} & B_{23} & B_{33}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-10 & -4 & 6\\ 0 & -2 & 8\\ 0 & 6 & -4\end{Vmatrix}.$$

$$B^{-1}=\frac{1}{20}\tilde{B}=\frac{1}{20}\begin{Vmatrix}-10 & -4 & 6\\ 0 & -2 & 8\\ 0 & 6 & -4\end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathrm{A}|}\tilde{\mathrm{A}},\ \tilde{\mathrm{A}}=\|\mathrm{A}_{ki}\|$$ – присоединённая матрица.

Найдём $\|\mathrm{A}_{ik}\|=\begin{Vmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{Vmatrix}$ для $\mathrm{A}=\begin{Vmatrix}2 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{Vmatrix}$.

$2\sim A_{11}=M_{11}=-1,\quad 3\sim A_{12}=-M_{12}=1,\ 2\sim A_{13}=M_{13}=-1,$

$-1\sim A_{21}=-M_{21}=5,\ 0\sim A_{22}=M_{22}=-6,\ 1\sim A_{23}=-M_{23}=4,$

$2\sim A_{31}=M_{31}=3,\quad 1\sim A_{32}=-M_{32}=-4,\ -1\sim A_{33}=M_{33}=3.$

$$\tilde{\mathrm{A}}=\begin{vmatrix}-1 & 5 & 3\\ 1 & -6 & -4\\ -1 & 4 & 3\end{vmatrix},\ \mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{-1}=\begin{vmatrix}-1 & 5 & 3\\ 1 & -6 & -4\\ -1 & 4 & 3\end{vmatrix}.$$

Вычислим произведение $\mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{-1}$:

$$\mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{20}\begin{Vmatrix}-10 & -4 & 6\\ 0 & -2 & 8\\ 0 & 6 & -4\end{Vmatrix}\cdot(-1)\begin{Vmatrix}-1 & 5 & 3\\ 1 & -6 & -4\\ -1 & 4 & 3\end{Vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{20}\begin{Vmatrix}0 & -2 & 4\\ -10 & 44 & 32\\ 10 & -52 & -36\end{Vmatrix}=(\mathrm{AB})^{-1}.$$

Таким образом, $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{-1}=\mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{-1}$.

Задание 4

Решите СЛАУ $\begin{cases}x_1-4x_2-x_3=-4,\\ 2x_1-3x_2+2x_3=5,\\ -2x_1+3x_3=2\end{cases}$

а) по правилу Крамера; б) с помощью обратной матрицы;
в) методом Гаусса; г) методом Гаусса в матричной форме;
д) модифицированным методом Жордана – Гаусса.

Краткие теоретические сведения

Пусть дана система трёх линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{4.1}$$

Определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2, x_3,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется основным определителем системы.

Найти решение системы.

а) Решим СЛАУ по правилу Крамера

Правило Крамера. Если $\Delta \neq 0$, то система (4.1) имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{4.2}$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

формулы (4.2) называются *формулами Крамера*.

Решим пример задания 4 нулевого варианта.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} = M_{11} = 37,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -4 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & -11 & 2 \\ -10 & -12 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{13} = -M_{13} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -3 & -11 \\ -10 & -12 \end{vmatrix} = -(36 - 110) = 74,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -10 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{31} = -M_{31} =$$

$$= -(-40 + 3) = 37,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2A_{33} = 2 \cdot M_{33} =$$

$$= 2(9 + 28) = 74.$$

Найдём решение по формулам (4.2):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{74}{37} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{37}{37} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{74}{37} = 2.$$

Проверка. Подставляем найденные решения x_1, x_2 и x_3 в данную систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 - 4 \cdot 1 - 2 = -4, \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5, \\ -2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 2 \end{cases}$$

– верно.

Ответ: $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}^T$.

б) Решим СЛАУ с помощью обратной матрицы.

Краткие теоретические сведения

Введём матрицы

$$\mathrm{A}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{X}=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{H}=\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix},$$

тогда система (4.1) примет вид:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}=\mathrm{H}. \qquad (4.3)$$

Если A – невырожденная матрица, то её определитель $|\mathrm{A}|\neq 0$ и имеет обратную матрицу A^{-1}.

Уравнение (4.3) называется матричным уравнением, соответствующим СЛАУ (4.1). Из матричного уравнения (4.3) найдём столбцевую матрицу неизвестных X. Умножим слева уравнение (4.3) на обратную матрицу A^{-1}:

$\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{H}\Rightarrow\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{H}$, так как $\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{A}=\mathrm{E}$ и $\mathrm{EX}=\mathrm{X}$.

Можно ли (4.3) умножить справа, т.е. $\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}\cdot\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{H}\cdot\mathrm{A}^{-1}$? Следовательно,

$$\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{H}. \qquad (4.4)$$

Решим систему задания 4 матричным способом. Для матрицы $A=\begin{Vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$ найдём обратную матрицу A^{-1}.

Определитель $|\mathrm{A}|=37\neq 0$.

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix}=\frac{1}{37}\begin{Vmatrix} -9 & 12 & -11 \\ -10 & 1 & -4 \\ -6 & 8 & 5 \end{Vmatrix}.$$

По формуле (4.4)

$$X = A^{-1}H = \frac{1}{37}\left\|\begin{matrix} -9 & 12 & -11 \\ -10 & 1 & -4 \\ -6 & 8 & 5 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{37}\left\|\begin{matrix} 74 \\ 37 \\ 74 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right\|.$$

Ответ: $X^T = \left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 2 \end{matrix}\right\|$.

в) Решим систему методом Гаусса.

Краткие теоретические сведения

Матрицу A размером $m \times n$ с помощью элементарных преобразований (см. [6], п.4) можно привести к ступенчатому виду.

Определение. Рангом матрицы A называется наибольший порядок не равного нулю минора матрицы A.

Если матрицу A приведём к ступенчатому виду, то число ненулевых строк ступенчатой матрицы S будет равно рангу матрицы A: $rg(A) = rg(S)$.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \quad AX = H. \qquad (4.5)$$

$$A = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \ldots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right\|$$ – основная матрица системы,

$$B=\|A,H\|=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{Vmatrix}$$

– расширенная матрица, которая получается из матрицы A приписыванием столбца H свободных членов.

Теорема Кроникера – Капелли. *Система (4.5) совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы* B *равен рангу основной матрицы* A*:*

$$rg(B)=rg(A).$$

Выводы: если $rg(B)=rg(A)=n$ – числу неизвестных, то система (4.5) имеет *единственное решение*;
если $rg(B)=rg(A)=r<n$, то система (4.5) имеет *бесконечно много решений;*
если $rg(B)\neq rg(A)$, то система (4.5) *несовместна (не имеет решений).*

П р и м е р. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 & 9 \end{Vmatrix}.$$

Решение. С помощью элементарных преобразований матрицу A приведём к ступенчатому виду:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 & 9 \end{Vmatrix} \begin{matrix} 2 \quad -2 \quad -3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 9 & 9 & 10 \\ 0 & -3 & -3 & -10 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & -10 & -6 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ -3 \\ \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\rightarrow\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 9 & 9 & 10\\ 0 & 0 & -30 & -37 & -36\\ 0 & 0 & -30 & -37 & -36\end{Vmatrix} -1 \rightarrow\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 9 & 9 & 10\\ 0 & 0 & -30 & -37 & -36\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}=S\ -$$

ступенчатая матрица, её ранг равен 3 – числу ненулевых строк. Следовательно, $rg(A)=rg(S)=3$.

Решим систему задания *4 методом Гаусса*, в основе которого лежит преобразование расширенной матрицы B к ступенчатому виду

$$B=\begin{Vmatrix}1 & -4 & -1 & | & -4\\ 2 & -3 & 2 & | & 5\\ -2 & 0 & 3 & | & 2\end{Vmatrix} -2\ 2 \rightarrow\begin{Vmatrix}1 & -4 & -1 & | & -4\\ 0 & 5 & 4 & | & 13\\ 0 & -8 & 1 & | & -6\end{Vmatrix}\begin{matrix}3\\ 2\end{matrix}+ \rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{Vmatrix}1 & -4 & -1 & | & -4\\ 0 & -1 & 14 & | & 27\\ 0 & -8 & 1 & | & -6\end{Vmatrix} -8 \rightarrow\begin{Vmatrix}1 & -4 & -1 & | & -4\\ 0 & -1 & 14 & | & 27\\ 0 & 0 & -111 & | & -222\end{Vmatrix} : -111 \rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{Vmatrix}1 & -4 & -1 & | & -4\\ 0 & -1 & 14 & | & 27\\ 0 & 0 & 1 & | & 2\end{Vmatrix}.$$

Элементарные преобразования привели расширенную матрицу B к ступенчатому виду.

$$rg(B)=rg(A)=3 \text{ – числу неизвестных.}$$

Данная система имеет единственное решение, которое можно найти из равносильной системы

$$\begin{cases} x_1-4x_2-x_3=-4,\\ -x_2+14x_3=27,\\ x_3=2 \end{cases}$$

обратным ходом метода Гаусса. Из второго уравнения $x_2=14x_3-27=1$, из первого уравнения

$$x_2=-4+4x_2+x_3=-4+4+2=2.$$

Ответ: $\begin{Vmatrix}2 & 1 & 2\end{Vmatrix}^T$.

г) Решим СЛАУ методом Гаусса в матричной форме

Краткие сведения из теории

В работе [3] разработана методика преобразования метода Гаусса в матричной форме.

Для любой матрицы A размером $m \times n$ существует треугольная матрица L, которая приводит матрицу A к ступенчатому виду:

$$\mathrm{L} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{S},$$

где S – ступенчатая матрица.

Построение матрицы L для случая $m \le n$:

$$\mathrm{L} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ell_{m1} & \ell_{m2} & \ell_{m3} & \cdots & \ell_{mm} \end{Vmatrix},$$

где элементы $\ell_{ik} = \begin{cases} A_{ki}, \text{ если } i \le k, \\ 0, \text{ если } i > k, \end{cases}$

A_{ki} – алгебраические дополнения последнего столбца угловых миноров *i*-го порядка матрицы A.

Угловыми минорами матрицы A называются миноры, расположенные вдоль главной диагонали $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mm}$ матрицы A.

Например, для нахождения элементов ℓ_{21} и ℓ_{22} найдём алгебраические дополнения 2-го столбца углового минора 2-го порядка $M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$:

$$\ell_{21} = A_{12} = -M_{12} = -a_{21},\ \ell_{22} = A_{22} = M_{22} = a_{11},\ \ \ell_{23} = \ldots = 0.$$

Для элементов 3-й строки матрицы L

$$\ell_{31} = A_{13},\ \ell_{32} = A_{23},\ \ell_{33} = A_{33},\ \ \ell_{34} = \ldots = 0$$

используем 3-й столбец углового минора $M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

и т.д.

Решим систему задания 4 методом Гаусса в матричной форме.

Для расширенной матрицы $\mathrm{B} = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right\|$

найдём матрицу L (используется матрица A).

Построим 2-ю строку ℓ_{21}, ℓ_{22} и ℓ_{23}, используя 2-й столбец углового минора $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$.

$$-4 \sim A_{12} = -M_{12} = -2 = \ell_{21},\ -3 \sim A_{22} = M_{12} = 1 = \ell_{22},\ \ell_{23} = 0.$$

Построим 3-ю строку, используя угловой минор

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \ell_{31} = A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\ell_{32} = A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 8,\ \ell_{33} = A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5.$$

Матрица $\mathrm{L} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 5 \end{matrix} \right\|$.

$$\mathrm{L} \cdot \mathrm{B} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 5 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 37 & 74 \end{array} \right\| \begin{matrix} \\ \\ :37 \end{matrix}$$

$$\to \begin{Vmatrix} 1 & -4 & -1 & | & -4 \\ 0 & 5 & 4 & | & 13 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{Vmatrix}, \text{ где } \mathrm{S} = \begin{Vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

В результате получаем СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = -4, \\ \quad 5x_2 + 4x_3 = 13, \\ \qquad\qquad x_3 = 2, \end{cases}$$

равносильную начальной системе.

Из второго уравнения $5x_2 = 13 - 4x_3 = 5 \Rightarrow x_2 = 1$;

из первого уравнения $x_1 = -4 + 4x_2 + x_3 = 2$.

Ответ: $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}^T$.

д) Решим данную систему модифицированным методом Жордана – Гаусса

В предыдущем случае «*г*» получена ступенчатая матрица

$$\mathrm{S} = \begin{Vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Найдём матрицу G такую, что $\mathrm{G} \cdot \mathrm{S} = \mathrm{D}$ – диагональная матрица. Матрица $G = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Для построения строк матрицы G используем первые столбцы угловых миноров матрицы S, причём размеры угловых миноров уменьшаются сверху вниз.

Выпишем наибольший угловой минор матрицы S – это определитель $|\mathrm{S}|$ матрицы:

$$|S| = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

и найдём алгебраические дополнения 1-го столбца S_{11}, S_{21}, S_{31}, которые соответственно образуют элементы 1-й строки матрицы G: $g_{11} = S_{11} = M_{11} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$,

$$g_{12} = S_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$g_{13} = S_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -11.$$

Алгебраические дополнения 1-го столбца углового минора $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ матрицы S являются элементами g_{22} и g_{23} матрицы G: $g_{22} = S_{22} = M_{22} = 1$, $g_{23} = S_{32} = -M_{32} = -4$. Таким образом, $G = \begin{Vmatrix} 5 & 4 & -11 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

$$D = G \cdot S = \begin{Vmatrix} 5 & 4 & -11 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Треугольные матрицы L и G преобразуют матрицу A в диагональную D.

Расширенная матрица $B = \|A, H\|$ преобразуется в матрицу

$$G(L\cdot B)=\begin{Vmatrix}5 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & -4 & -1 & | & -4\\ 0 & 5 & 4 & | & 13\\ 0 & 0 & 1 & | & 2\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}5 & 0 & 0 & | & 10\\ 0 & 5 & 0 & | & 5\\ 0 & 0 & 1 & | & 2\end{Vmatrix}.$$

СЛАУ задания 4 примет простейший вид:

$$\begin{cases}5x_1=10,\\ 5x_2=5,\\ x_3=2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=2.$$

Ответ: $\begin{Vmatrix}2 & 1 & 2\end{Vmatrix}^T$.

Задание 5

Решите СЛАУ $\begin{cases}x_1-2x_2+x_4=1,\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=-5,\\ x_2-x_3+2x_4=-7,\\ -x_1+3x_2+x_3-x_4=0:\end{cases}$

а) методом Гаусса; б) методом Гаусса в матричной форме;
в) модифицированным методом Жордана – Гаусса.

а) Решение системы методом Гаусса

Расширенную матрицу B приведём к ступенчатому виду:

$$B=\begin{Vmatrix}1 & -2 & 0 & 1 & | & 1\\ 2 & 1 & -1 & 2 & | & -5\\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -7\\ -1 & 3 & 1 & -1 & | & 0\end{Vmatrix}\begin{matrix}-2 & 1\\ & \\ & \\ & \end{matrix}\rightarrow\begin{Vmatrix}1 & -2 & 0 & 1 & | & 1\\ 0 & 5 & -1 & 0 & | & -7\\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -7\\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1\end{Vmatrix}\rightarrow$$

$$\to \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \\ \end{array}\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right\|\begin{array}{c} \\ -5 \\ \\ \\ \end{array} \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -10 & 28 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 8 \end{array}\right\|\begin{array}{c} \\ \\ :2 \\ :2 \end{array} \to$$

$$\to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -14 \end{array}\right\|\begin{array}{c} \\ \\ +2 \\ \\ \end{array} \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right\| \Rightarrow$$

$$\to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -14 \end{array}\right\|\begin{array}{c} \\ \\ +2 \\ \\ \end{array} \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right\| \Rightarrow$$

Получаем систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -7, \\ x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_4 = -6, \end{cases}$ равносильную исходной. Методом обратного хода решим эту систему.

Из 4-го уравнения $x_4 = -2$; из 3-го уравнения $x_3 = 4 + x_4 = 2$;

из 2-го уравнения $x_2 = -7 + x_3 - 2x_4 = -1$;

из 1-го уравнения $x_1 = 1 + 2x_2 - x_4 = 1$.

Проверка: $\begin{cases} 1 - 2(-1) + (-2) = 1, \\ 2 \cdot 1 + (-1) - 2 + 2 \cdot (-2) = -5, \\ -1 - 2 + 2(-2) = -7, \\ -1 + 3 \cdot (-1) + 2 - (-2) = 0 \end{cases}$ – верно.

Ответ: $\left\|1 \quad -1 \quad 2 \quad -2\right\|^T$.

б) Решение системы методом Гаусса в матричной форме

Для основной матрицы $A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$ найдём матрицу L. 1-я строка матрицы L известна. Для нахождения 2-й строки используем угловой минор 2-го порядка M_2 матрицы A, в котором найдём алгебраические дополнения элементов 2-го (последнего) столбца

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \ \ell_{21} = A_{12} = -M_{12} = -2,$$

$$\ell_{22} = A_{22} = M_{22} = 1, \ \ell_{23} = 0, \ \ell_{24} = 0.$$

Для нахождения 3-й строки матрицы L используем угловой минор M_3 матрицы A, в котором найдём алгебраические дополнения последнего столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \ \ell_{31} = A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\ell_{32} = A_{23} = -M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\ell_{33} = A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \ \ell_{34} = 0.$$

Для нахождения 4-й строки матрицы L используем угловой минор 4-го порядка матрицы A, в котором найдём алгебраические дополнения последнего столбца:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\ell_{41}=A_{14}=-M_{14}=-\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-8,$$

$$\ell_{42}=A_{24}=M_{24}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=2,$$

$$\ell_{43}=A_{34}=-M_{34}=-\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-6,$$

$$\ell_{44}=A_{44}=M_{44}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}-2\\ \\ \\ \end{matrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4.$$

Таким образом, матрица $\mathrm{L}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 5 & 0\\ -8 & 2 & -6 & -4\end{Vmatrix}$,

$$\mathrm{L}\cdot\mathrm{B}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 5 & 0\\ -8 & 2 & -6 & -4\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & -2 & 0 & 1 & | & 1\\ 2 & 1 & -1 & 2 & | & -5\\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 2\\ -1 & 3 & 1 & -1 & | & -1\end{Vmatrix}=$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 24 \end{array} \right\| \begin{array}{c} \\ \\ :2 \\ :2 \end{array}$$

Решаем более простую систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1, \\ \qquad 5x_2 - x_3 = -7, \\ \quad -2x_3 + 5x_4 = -14, \\ \qquad\qquad x_4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -2, \\ x_3 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left\| 1 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \right\|^T$.

в) Решение задания 5 модифицированным матодом Жордана – Гаусса

В предыдущем пункте «*б*» найдена матрица

$$\mathrm{L} \cdot \mathrm{B} = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right\|, \text{ где } \mathrm{S} = \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \text{ – сту-}$$

пенчатая матрица для матрицы A.

Найдём матрицу G, которая преобразует матрицу S в диагональную D, а исходное уравнение в уравнение $\mathrm{D}x = c$.

Матрица $\mathrm{G} = \left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 0 & 0 & g_{33} & g_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$, где элементы 1-й строки соответственно равны алгебраическим дополнениям элементов 1-го столбца углового минора матрицы S

$$M_4=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\Rightarrow g_{11}=S_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix}5 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-10,$$

$$g_{12}=S_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-4,$$

$$g_{13}=S_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 5 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2,$$

$$g_{14}=S_{41}=-M_{41}=-\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 5\end{vmatrix}=0.$$

Для построения 2-й строки матрицы G используем алгебраические дополнения 1-го столбца углового минора:

$M_3=\begin{vmatrix}5 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$ – в матрице S вычёркиваем 1-ю строку и 1-й столбец.

$$g_{22}=S_{22}=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2,\quad g_{23}=S_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$g_{24}=S_{42}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-5.$$

Аналогично построим 3-ю строку матрицы G, используя угловой минор M_2:

$$M_2=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 0 & 1\end{vmatrix}\Rightarrow g_{33}=S_{33}=1,\ g_{34}=S_{43}=-5.$$

Таким образом, $G=\begin{Vmatrix} -10 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Найдём

$$G\cdot(L\cdot B)=\begin{Vmatrix} -10 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\cdot\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{array}{cccc|c} -10 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right\|.$$

Итак,

$$\begin{cases} -10x_1=-10, \\ -10x_2=10, \\ -2x_3=-4, \\ x_4=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=-1, \\ x_3=2, \\ x_4=-2. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \end{Vmatrix}^T$.

ТИПОВОЙ РАСЧЁТ

Задание 1. Вычислите определитель 3-го порядка:

1) по правилу треугольников;

2) по правилу Саррюса;

3) разложением по строке (столбцу).

1.1. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$. **1.2.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$. **1.3.** $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$.

1.4. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **1.5.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 6 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. **1.6.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$.

1.7. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$. **1.8.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. **1.9.** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

1.10. $\begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$. **1.11.** $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \end{vmatrix}$. **1.12.** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

1.13. $\begin{vmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. **1.14.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$. **1.15.** $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.16. $\begin{vmatrix} 7 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **1.17.** $\begin{vmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. **1.18.** $\begin{vmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

1.19. $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix}$. **1.20.** $\begin{vmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. **1.21.** $\begin{vmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

1.22. $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$. **1.23.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **1.24.** $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

1.25. $\begin{vmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. **1.26.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **1.27.** $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$.

1.28. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & 10 \end{vmatrix}$. **1.29.** $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$. **1.30.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Задание 2. Применяя свойство п. 1.2.6, вычислите определитель:

2.1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. **2.2.** $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

2.3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. **2.4.** $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -2 & 6 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 8 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 17 & 5 \\ 2 & 5 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

2.5. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$. **2.6.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 4 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & -8 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 16 \end{vmatrix}$.

2.7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. **2.8.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2.9. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$. **2.10.** $\begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2.11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ 7 & 2 & 0 & 4 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **2.12.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 9 & 6 \end{vmatrix}$.

2.13. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. **2.14.** $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2.15. $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ -8 & -4 & 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. **2.16.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$.

2.17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$. **2.18.** $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 2 & 18 & 0 \end{vmatrix}$.

2.19. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.20. $$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -5 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 10 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

2.21. $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 7 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

2.22. $$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -5 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.23. $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -2 & -3 & -4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.24. $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.25. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

2.26. $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

2.27. $$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.28. $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.29. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$. **2.30.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 16 \\ 1 & 8 & -1 & 8 & 64 \\ 1 & 16 & 1 & 16 & 256 \end{vmatrix}$.

Задание 3. Даны две квадратные матрицы A и B 3-го порядка. Найдите: 1) $C = A \cdot B$;

2) показать, что $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

3.1. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

3.2. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$.

3.3. $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$.

3.4. $A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{Vmatrix}$.

3.5. $A = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

3.6. $A = \begin{Vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

3.7. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$.

3.8. $A = \begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{Vmatrix}$.

3.9. $A = \begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

3.10. $A = \begin{Vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$.

3.11. $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

3.12. $A = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

3.13. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{Vmatrix}$.

3.14. $A = \left\| \begin{matrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right\|$, $B = \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{matrix} \right\|$.

3.15. $A = \left\| \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{matrix} \right\|$, $B = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{matrix} \right\|$.

3.16. $A = \left\| \begin{matrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{matrix} \right\|$, $B = \left\| \begin{matrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{matrix} \right\|$.

3.17. $A = \left\| \begin{matrix} -3 & -9 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$, $B = \left\| \begin{matrix} 3 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\|$.

3.18. $A = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{matrix} \right\|$, $B = \left\| \begin{matrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{matrix} \right\|$.

3.19. $A = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix} \right\|$, $B = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} \right\|$.

3.20. $A = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \right\|$, $B = \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{matrix} \right\|$.

3.21. $A = \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{matrix} \right\|$, $B = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} \right\|$.

3.22. $A = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{Vmatrix}.$

3.23. $A = \begin{Vmatrix} -8 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{Vmatrix}.$

3.24. $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{Vmatrix}.$

3.25. $A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}.$

3.26. $A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$

3.27. $A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & -6 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}.$

3.28. $A = \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$

3.29. $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -1 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{Vmatrix}.$

3.30. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$, $\quad B = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$.

Задание 4. Решить систему линейных уравнений: а) методом Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса; г) методом Гаусса в матричной форме; д) модифицированным методом Жордана – Гаусса.

4.1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 7, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$ **4.2.** $\begin{cases} -x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$ **4.4.** $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ -2x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$ **4.6.** $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 7x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$ **4.8.** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -15, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -6, \\ -x_1 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$ **4.10.** $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 7, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 31, \\ x_2 + 2x_3 = -11. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 + 3x_3 = -2, \\ -x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$ **4.12.** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -16, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -19, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 13. \end{cases}$ **4.14.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 = -34, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$ **4.16.** $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ **4.18.** $\begin{cases} 2x_2 - x_3 = -5, \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 6x_3 = 1. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -7, \\ 3x_1 - x_2 = -10. \end{cases}$ **4.20.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 13, \\ 2x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$ **4.22.** $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 = 5, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ **4.24.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 5. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ 5x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ **4.26.** $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$

4.27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$ **4.28.** $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -5, \\ 5x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} -3x_1-9x_2-5x_3=2, \\ -x_1+2x_2+x_3=-2, \\ -6x_1+x_2=-6. \end{cases}$ **4.30.** $\begin{cases} x_1+2x_2=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ 2x_1+4x_2+x_3=3. \end{cases}$

Задание 5. Решить СЛАУ: а) методом Гаусса; б) методом Гаусса в матричной форме; в) модифицированным методом Жордана – Гаусса.

5.1. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=10, \\ 2x_1-3x_2-x_3-x_4=-3, \\ 3x_1+2x_2-x_3=4, \\ -x_1-3x_2+x_3+4x_4=-20. \end{cases}$ **5.2.** $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2-x_3-x_4=3, \\ 3x_1+2x_2-x_3=-1, \\ 3x_1-4x_2-3x_4=1. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3+2x_4=-5, \\ -x_1+3x_2+4x_3-x_4=5, \\ 2x_1-4x_2+x_3-x_4=-4, \\ x_1+7x_2+7x_3=5. \end{cases}$ **5.4.** $\begin{cases} 4x_1-2x_2+3x_3+2x_4=3, \\ -2x_2+3x_3-4x_4=1, \\ 4x_1-6x_2+9x_3-6x_4=5, \\ 8x_1-6x_2+9x_3=7. \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} 2x_1-2x_2-x_3+2x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2-4x_3-x_4=11, \\ 3x_1-2x_3+3x_4=-1, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=-2. \end{cases}$ **5.6.** $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=3, \\ -x_1-x_2+2x_3-x_4=-1, \\ x_1-x_2-x_3=-1, \\ 3x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=-3, \\ -x_1+3x_2+3x_3+x_4=0, \\ -x_1+10x_2+3x_3-2x_4=3, \\ 3x_1-4x_2+2x_3+3x_4=-6. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=1, \\ 5x_2+2x_3+3x_4=0, \\ -x_1+3x_2+3x_3+x_4=-1, \\ 3x_1-4x_2+2x_3+3x_4=3. \end{cases}$

5.9. $$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3-x_4=-4,\\ 2x_1-x_3+2x_4=6,\\ -2x_1+2x_2+x_3-2x_4=8,\\ x_1-x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$$

5.10. $$\begin{cases} 2x_1-x_3+2x_4=0,\\ -2x_1+7x_2-x_3-2x_4=14,\\ -3x_1+x_2+x_3-x_4=-3,\\ x_1+x_2-x_3+3x_4=-3. \end{cases}$$

5.11. $$\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-3x_4=4,\\ 3x_1+3x_2-2x_3+x_4=3,\\ -3x_1+2x_2-4x_3+2x_4=-3,\\ -x_1+3x_2-3x_3+2x_4=1. \end{cases}$$

5.12. $$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=2,\\ 2x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=-2,\\ x_1-x_2-2x_3-x_4+x_5=0,\\ 4x_1-4x_2+2x_3-x_4-2x_5=-1. \end{cases}$$

5.13. $$\begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4=0,\\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=-5,\\ 4x_1-x_2+3x_3+x_4=-1,\\ -2_1+2x_2-x_3+3x_4=3. \end{cases}$$

5.14. $$\begin{cases} x_1+2x_2+6x_3+4x_4=-1,\\ x_1-x_2-x_3-x_4=0,\\ 4x_1-x_2+3x_3+x_4=-14,\\ -2x_1+2x_2-x_3+3x_4=3. \end{cases}$$

5.15. $$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-3x_4=-3, \\ 5x_1+x_2-2x_3+x_4=1, \\ -x_1+2x_2-3x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

5.16. $$\begin{cases} 4x_1-2x_2+3x_3-x_4=3, \\ -3x_1+x_2-2x_3+2x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_3-x_4=5, \\ -x_1+3x_2+x_3+3x_4=-2. \end{cases}$$

5.17. $$\begin{cases} -x_1-3x_2-4x_3+7x_4=7, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3-3x_4=-3, \\ 5x_1+x_2-2x_3+x_4=1. \end{cases}$$

5.18. $$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4=4, \\ -3x_1+x_2-2x_3+2x_4=1, \\ 4x_1-2x_2+3x_3-x_4=3, \\ 2x_1-3x_3=5. \end{cases}$$

5.19. $$\begin{cases} 2x_1-3x_3=6, \\ 4x_1-2x_2+3x_3-x_4=3, \\ -3x_1+x_2-2x_3+2x_4=1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4=4. \end{cases}$$

5.20. $$\begin{cases} -2x_1+3x_2-x_3+4x_4=-4, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1+4x_2-5x_3-x_4=-1, \\ 4x_1-5x_2-x_3-x_4=3. \end{cases}$$

5.21. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 9x_4 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -4, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

5.22. $$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -4, \\ x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 2, \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 9x_4 = 8. \end{cases}$$

5.23. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 36, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 13, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -33. \end{cases}$$

5.24. $$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 13, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 36. \end{cases}$$

5.25. $$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -30, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 13, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 36. \end{cases}$$

5.26. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

Библиографический список

1. *Беклемишев Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Физматлит, 2003.

2. *Данго П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах, т. 1 – М.: Высшая школа, 1986.

3. *Карасёв И.П.* Матричная форма метода Гаусса решения СЛАУ. Международная научно-обозревательная конференция. – М.: 2009.

4. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М.: Фзматлит, 2012.

5. *Клетник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.

6. *Новиков А.И.* Начала линейной алгебры и аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 20015.

7. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1970.

Линейная алгебра

Типовой расчёт

Составители: К а р а с ё в Иван Петрович

Редактор
Корректор

Подписано в печать 04.04.16. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 3,0.
Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 25 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.