УДК 62-192:52(031)

Н.А. Смоляров

ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ДУБЛИРОВАННОЙ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ С ОБЩИМ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЕМ

Получены соотношения для оценки вероятности безотказной работы и средней наработки до отказа дублированной восстанавливаемой системы с общим переключателем и различными видами резерва по нагрузке.

Резервирование с восстановлением является высокоэффективным средством повышения надежности технических систем. На практике широкое применение получили дублированные восстанавливаемые системы как самые простые. Они состоят из основной, резервной подсистем и переключателя, который осуществляет замену отказавшей подсистемы резервной. Переключатель может быть общим или индивидуальным для каждой из подсистем. При отказе подсистемы или переключателя они восстанавливаются. Очевидно, что надежность системы в значительной мере зависит от надежности переключателя. Поэтому при расчете надежности таких систем необходимо учитывать надежность этого устройства.

Однако в работе [1] отсутствуют расчетные соотношения для оценки показателей надежности: вероятности безотказной работы и средней наработки до отказа дублированной восстанавливаемой системы с общим переключателем. В работах [2, 3] даны оценки этих показателей безотказности при условии высокой надежности всех элементов такой системы.

В связи с этим задачей данной статьи является оценка вероятности безотказной работы и средней наработки до отказа дублированной восстанавливаемой системы с общим переключателем и различными видами резерва по нагрузке.

Пусть в рассматриваемой системе подсистемы равнонадежны, интенсивность отказов одной подсистемы λ, интенсивность восстановления ее μ. Интенсивность отказов переключателя λ_n, интенсивность восстановления его μ_n. Отказ переключателя приводит к отказу всей системы. Все потоки отказов и восстановлений простейшие. Необходимо оценить вероятность безотказной работы и среднюю наработку до отказа этой системы.

Так как все потоки отказов и восстановлений простейшие, то процесс, протекающий в системе, представляет собой марковский случайный процесс. Граф процесса переходов системы показан на рисунке 1.

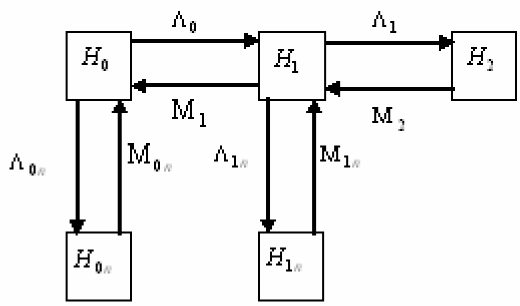

Рисунок 1 – Граф процесса переходов дублированной восстанавливаемой системы

Здесь $H_0, H_1, H_2, H_{0n}, H_{1n}$ — состояния системы, которые означают соответственно: обе подсистемы и переключатель работоспособны; основная подсистема отказала, резервная подсистема и переключатель работоспособны; обе подсистемы отказали, переключатель работоспособен; обе подсистемы работоспособны, переключатель отказал; основная подсистема и переключатель отказали, резервная подсистема работоспособна. Λ_0, Λ_1, Λ_{0n}, Λ_{1n}, M_1, M_2, M_{0n}, M_{1n} – интенсивности переходов из одного состояния в другое.

Так как необходимо найти вероятность безотказной работы и среднюю наработку до отказа системы, то она рассматривается как система с поглощающим экраном, т.е. интенсивности восстановлений $\mathrm{M}_2, \mathrm{M}_{0n}, \mathrm{M}_{1n}$ равны нулю. Граф процесса переходов системы принимает вид, показанный на рисунке 2.

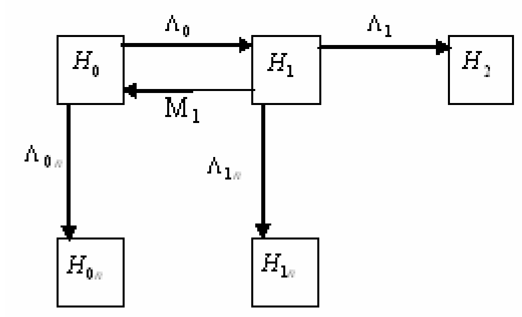

Рисунок 2 – Граф процесса переходов дублированной восстанавливаемой системы с поглощающим экраном

С учетом того, что состояния H_2, H_{0n}, H_{1n} являются неблагоприятными, а состояния H_0 и H_1 — несовместными благоприятными, вероятность безотказной работы системы за наработку t

$$P_{c.\partial}(t) = P_0(t) + P_1(t), \qquad (1)$$

где $P_0(t)$, $P_1(t)$ — вероятности состояний системы H_0, H_1 соответственно в момент времени t.

Средняя наработка до отказа системы

$$T_{cp.c.\partial} = \int_0^\infty P_{c.\partial}(t)dt = \int_0^\infty P_0(t)dt + \int_0^\infty P_1(t)dt = \\ = T_{cp.0} + T_{cp.1}, \qquad (2)$$

где $T_{cp.0}$ и $T_{cp.1}$ — соответственно среднее время нахождения системы в состоянии H_0 и H_1.

Таким образом, для оценки вероятности безотказной работы и средней наработки до отказа системы необходимо составить и решить следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -(\Lambda_0 + \Lambda_{0n})P_0(t) + M_1 P_1(t), \\ \frac{dP_1(t)}{dt} &= -(\Lambda_1 + M_1 + \Lambda_{1n})P_1(t) + \Lambda_0 P_0(t). \end{aligned}\right\} (3)$$

Эту систему естественно решать при следующих начальных условиях: $P_0(0) = 1$ и $P_1(0) = P_2(0) = P_{0n}(0) = P_{1n}(0) = 0$, где $P_2(0)$, $P_{0n}(0), P_{1n}(0)$ — вероятности состояний системы H_2, H_{0n}, H_{1n} соответственно при $t = 0$.

Решая систему (3) операторным методом и принимая во внимание выражение (1), в результате получаем

$$P_{c.\partial}(t) = \frac{s_1 + r_1 + \Lambda_0}{2s_1 + r_1 + r_0} e^{s_1 t} + \frac{s_2 + r_1 + \Lambda_0}{2s_2 + r_1 + r_0} e^{s_2 t}, \quad (4)$$

где $r_0 = \Lambda_0 + \Lambda_{0n}$; $r_1 = \Lambda_1 + M_1 + \Lambda_{1n}$; s_1, s_2 — корни знаменателя изображения $\overline{P}_0(s) + \overline{P}_1(s)$, которые определяются по формуле

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-(r_1 + r_0) \pm \sqrt{(r_1 - r_0)^2 + 4M_1\Lambda_0}\right].$$

Проанализировав соотношение (4) для трех видов резерва по нагрузке, с учетом того, что $\Lambda_{0n} = \Lambda_{1n} = \lambda_n$, $\Lambda_1 = \lambda$, $M_1 = \mu$, получим выражение для оценки вероятности безотказной работы дублированной восстанавливаемой системы за наработку t:

$$P_{c.\partial}(t) = \frac{e^{-\lambda_n t}}{\alpha_1 - \alpha_2}(\alpha_1 e^{-\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{-\alpha_1 t}). \qquad (5)$$

При нагруженном резерве $\Lambda_0 = 2\lambda$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\lambda}{2\gamma}(1 + 3\gamma \pm \sqrt{1 + 6\gamma + \gamma^2}),$$

где $\gamma = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

При облегченном резерве $\Lambda_0 = \lambda(1 + k_o)$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\lambda}{2\gamma}[1 + (2 + k_o)\gamma \pm \sqrt{1 + 2(2 + k_o)\gamma + (k_o\gamma)^2}],$$

где $k_o = \dfrac{\lambda_o}{\lambda}$. Здесь λ_o — интенсивность отказов резервной подсистемы.

При ненагруженном резерве $\Lambda_0 = \lambda$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\lambda}{2\gamma}(1 + 2\gamma \pm \sqrt{1 + 4\gamma}).$$

Определим оценку средней наработки системы до отказа.

Умножив обе части уравнений системы (3) на dt и проинтегрировав их в пределах от 0 до ∞, получим

$$\left.\begin{aligned} -1 &= -(\Lambda_0 + \Lambda_{0n})T_{cp.0} + M_1 T_{cp.1}, \\ 0 &= -(\Lambda_1 + M_1 + \Lambda_{1n})T_{cp.1} + \Lambda_0 T_{cp.0}. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений и учитывая выражение (2), в результате получим соотношение для оценки средней наработки до отказа дублированной восстанавливаемой системы:

$$T_{cp.c.\partial} = \frac{\Lambda_0 + \Lambda_1 + M_1 + \lambda_n}{\Lambda_0\Lambda_1 + \lambda_n(\Lambda_0 + \Lambda_1 + M_1 + \lambda_n)}. \qquad (6)$$

При нагруженном резерве $\Lambda_0 = 2\lambda$

$$T_{cp.c.\partial} = \frac{3\lambda + \mu + \lambda_n}{2\lambda^2 + \lambda_n(3\lambda + \mu + \lambda_n)}. \qquad (7)$$

При облегченном резерве $\Lambda_0 = \lambda(1 + k_o)$

$$T_{cp.c.\partial} = \frac{(2 + k_o)\lambda + \mu + \lambda_n}{(1 + k_o)\lambda^2 + \lambda_n[(2 + k_o)\lambda + \mu + \lambda_n]}. \qquad (8)$$

При ненагруженном резерве $\Lambda_0 = \lambda$

$$T_{cp.c.\partial} = \frac{2\lambda + \mu + \lambda_n}{\lambda^2 + \lambda_n(2\lambda + \mu + \lambda_n)}. \qquad (9)$$

Следует отметить, что при абсолютно надежном переключателе ($\lambda_n = 0$) соотношения (5) – (9) полностью совпадают с соответствующими выражениями в работах [3, 4].

Проанализируем влияние интенсивности отказов переключателя на среднюю наработку до отказа системы, т.е. зависимость $T_{ср.с.д} = f(\lambda_n)$.

Вначале найдем условия для λ_n, при которых имеется выигрыш в надежности по средней наработке до отказа от использования дублированной системы по сравнению с основной подсистемой при нагруженном и ненагруженном резервах.

Средняя наработка до отказа основной подсистемы

$$T_{ср.с} = \frac{1}{\lambda}.$$

Выигрыш в надежности имеет место, если выполняется условие:

$$T_{ср.с.д} > T_{ср.с}. \qquad (10)$$

Подставив в это неравенство формулы (7) и (9), найдем условия для λ_n при нагруженном и ненагруженном резервах.

При нагруженном резерве

$$\lambda_n < \frac{1}{2}(-2\lambda - \mu + \sqrt{8\lambda^2 + 8\lambda\mu + \mu^2}).$$

При ненагруженном резерве

$$\lambda_n < \frac{1}{2}(-\lambda - \mu + \sqrt{5\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}).$$

Для анализа зависимости $T_{ср.с.д} = f(\lambda_n)$ рассмотрим пример дублированной восстанавливаемой системы для двух случаев:

1) $\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$ ч$^{-1}$, $\mu = 0{,}2$ ч$^{-1}$;

2) $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$ ч$^{-1}$, $\mu = 0{,}2$ ч$^{-1}$.

В первом случае для выполнения условия (10) необходимо, чтобы $\lambda_n < 0{,}9808\lambda$ и $\lambda_n < 0{,}9903\lambda$ соответственно при нагруженном и ненагруженном резерве. Во втором случае для выполнения условия (10) нужно, чтобы $\lambda_n < 0{,}9979\lambda$ и $\lambda_n < 0{,}999\lambda$ соответственно при нагруженном и ненагруженном резерве. Результаты расчетов величины $T_{ср.с.д}$ показаны на рисунке 3.

Ось λ_n/λ задана в логарифмическом масштабе при $\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$ ч$^{-1}$. Сплошными и пунктирными линиями обозначены соответственно нагруженный и ненагруженный резерв. При $\lambda_n = 0{,}001\lambda$ для кривых 2 $T_{ср.с.д} \approx 401 \cdot 10^3$ ч и $T_{ср.с.д} \approx 501 \cdot 10^3$ ч соответственно при нагруженном и ненагруженном резерве.

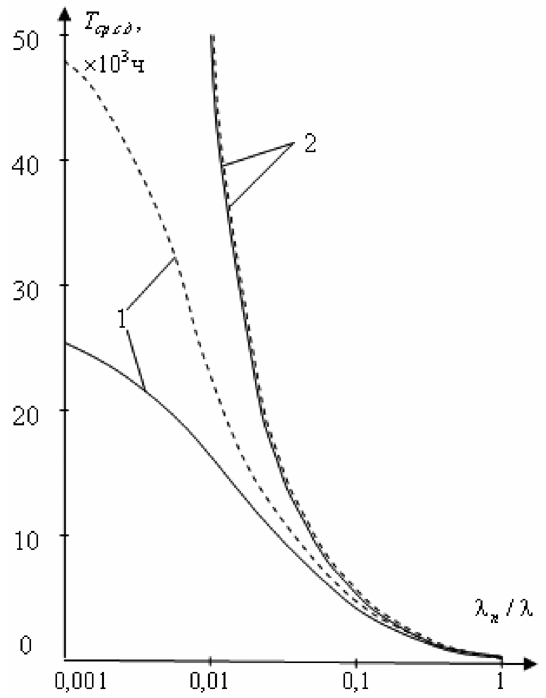

Рисунок 3 – Графики зависимости $T_{ср.с.д} = f(\lambda_n/\lambda)$: кривые 1 соответствуют первому случаю, кривые 2 – второму случаю

Рассмотрим выигрыш в надежности G_T по средней наработке до отказа системы с ненагруженным резервом по сравнению с системой с нагруженным резервом. Тогда

$$G_T = \frac{T''_{ср.с.д}}{T'_{ср.с.д}},$$

где величина $T''_{ср.с.д}$ определяется по формуле (9); величина $T'_{ср.с.д}$ — по выражению (7). Результаты расчетов выигрыша G_T показаны на рисунке 4.

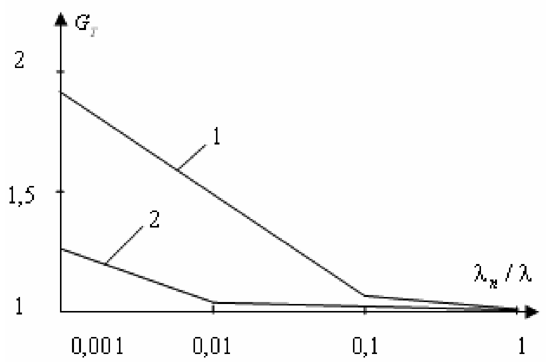

Рисунок 4 – Графики зависимости $G_T = f(\lambda_n/\lambda)$: кривая 1 соответствует первому случаю, кривая 2 – второму случаю

Из полученных графиков (рисунки 3, 4) можно сделать следующий вывод. При уменьшении значения λ_n от $0{,}9808\lambda$, или $0{,}9903\lambda$, или $0{,}9979\lambda$, или $0{,}999\lambda$ (в зависимости от рассматриваемого случая и вида резерва по нагрузке) примерно до $\lambda_n = 0{,}1\lambda$ скорость изменения величины $T_{ср.с.д}$ невысокая (рисунок 3). В этом случае надежность системы низкая и на нее почти не оказывают влияние величина λ и вид резерва. При $\lambda_n < 0{,}1\lambda$ скорость изменения $T_{ср.с.д}$ значительно увеличивается, т. е. надежность системы заметно возрастает. Такой же характер изменения у величины G_T (рисунок 4) для первого случая, а для второго случая — только при $\lambda_n < 0{,}01\lambda$. В первом случае система состоит из менее надежных подсистем, при этом выигрыш G_T больше, чем во втором случае с более надежными подсистемами. При $\lambda_n << \lambda$ и $\lambda << \mu$ выигрыш G_T стремится к двум.

Таким образом, в общем случае чем меньше величина λ_n, тем более надежна дублированная восстанавливаемая система, но выигрыш в надежности G_T по средней наработке до отказа ограничен величиной, равной двум.

Итак, в результате получены соотношения, позволяющие оценить вероятность безотказной работы и среднюю наработку до отказа дублированной восстанавливаемой системы с общим переключателем и различными видами резерва по нагрузке. Эти соотношения могут быть использованы при анализе и синтезе информационно-вычислительных систем, АСУ и других систем, в которых для повышения надежности применяется резервирование с восстановлением.

Библиографический список

1. *Острейковский В.А.* Теория надежности: учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 464 с.

2. *Ушаков И.А.* Вероятностные модели надежности информационно–вычислительных систем. – М.: Радио и связь, 1991. – 132 с.

3. Надежность технических систем: справочник/ Ю.К.Беляев, В.А. Богатырев, В.В. Болотин и др.; под ред. И.А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985. – 608 с.

4. Надежность функционирования автоматизированных систем. Часть 2: учеб. пособие/ А.М. Смоляров; Рязан. гос. радиотехн. акад. – Рязань, 1996. – 68с.