УДК 517. 938

Н.М. Турусикова

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ

Рассматривается задача управления инвестиционным портфелем (ИП), состоящим из вложений в финансовые активы. Математическая модель ИП в непрерывном времени описывается системой дифференциальных уравнений. Задача управления портфелем формулируется как задача достижения определенного уровня доходности за некоторый промежуток времени. Предлагается подход к определению оптимальных управляющих воздействий и нахождению уровня доходности портфеля при найденной форме управления.

1. Введение. Проблема управления инвестиционным портфелем (ИП) является одной из основных в финансовой инженерии.

В настоящей статье рассматривается модель портфеля в непрерывном времени [1].

Пусть ИП состоит из (n-1)-го вида вложений и банковского счета. Управление портфелем осуществляется путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций посредством банковского счета. Предположим, что деньги извне на банковский счет не поступают, а со счета снимаются только с целью вложений, формирующих инвестиционный портфель. В этом случае математическая модель управления самофинансируемого инвестицион-ного портфеля описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + F(t), \qquad (1)$$

где $x(t) = colon(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t))$ – вектор, первые n-1 компонент которого равны объему инвестиций в i-й актив ($i = \overline{1, n-1}$), а компонента $x_n(t)$ описывает состояние банковского счета; элементы вектора $u(t) = colon(u_1(t), u_2(t),..., u_m(t))$ есть суммы перераспределяемого капитала в единицу времени (мгновенный капитал). При этом если $u_i(t) > 0$, то это означает перевод капитала в сумме $u_i(t)$ в единицу времени с банковского счета в i-й вид вложений, если $u_i(t) < 0$, то происходит перераспределение капитала с i-го вложения на банковский счет. Компоненты $a_{ij}(t), i \neq j$, матрицы $A(t) = \{a_{ij}(t)\}_1^n$ характеризуют влияние j-й компоненты вектор-функции $x(t)$ на изменение объема инвестиций в i-м активе ($i = \overline{1, n}$), а элементы $a_{ii}(t)$, описывают влияние объема i-го вклада на изменение объема вложений в i-й актив. Матрица $B(t)$ имеет размерность $n \times m$, определяет влияние управляющих воздействий на инвестиции. Вектор-функция $F(t)$ характеризует расходы, связанные с управлением ИП (налоговые отчисления, оплата перевода денег и т.д.).

2. Постановка и предварительный анализ задачи. Пусть $V(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t)$ – общий капитал портфеля. Поставим задачу – определить стратегию управления ИП путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций так, чтобы начальный капитал $V(0) = V_0$ достиг к некоторому моменту времени T значения $V(T) = V_1$, что позволяет добиться желаемой доходности ИП, и оценка денежного потока $\left[\int_0^T \sum_{i=1}^m u_i^2(t)dt\right]^{1/2}$ была бы минимальной.

Заметим, что требование самофинансирования портфеля накладывает условия $x_k(t) \geq 0, k = \overline{1, n}$, на объемы инвестиций.

Для простоты рассуждений будем полагать, что в начальный момент времени капитал $V_0 = 0$, то есть все $x_k(0) = 0, k = \overline{1, n}$.

Рассмотрим систему уравнений вида (1), в которой $x \in R^n$, $u \in R^m$ – вектор управляющих воздействий, $m \leq n$, $t \in [0, T]$, $T > 0$ – некоторое число, $A(t), B(t)$ – непрерывные на сегменте *[0, T]* матрицы, *F(t)* – непрерывная на *[0, T]* n-мерная вектор-функция. В качестве допустимых управлений будем рассматривать непрерывные на $[0,T]$ вектор-функции $u(t)$. Множество всех допустимых управлений обозначим U.

Требуется найти управление $u(\cdot)\in U$, переводящее систему (1) из начального состояния $x(0)=0$ в заданное конечное $x(T)=\beta$ и имеющее наименьшую норму. Норму вектор-функции $u(t)$ определим равенством

$$\|u(t)\| = \left[\int_0^T u^2(t)dt\right]^{1/2} = \left[\int_0^T \sum_{i=1}^m u_i^2(t)dt\right]^{1/2}.$$

3. Определение оптимальных управляющих воздействий. Установлено, что искомое управление является решением системы

$$\int_0^T \left(h^{(i)}(T,\tau), u(\tau)\right)d\tau = c_i, \quad i=\overline{1,n}, \qquad (2)$$

где $c_i = x_i(T) - \int_0^T \left(x^{(i)}(T,\tau), F(\tau)\right)d\tau$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение, $h^{(i)}(T,\tau) = \{h_{ij}(T,\tau),\ j=\overline{1,m}\}$ – i-я строка импульсной переходной матрицы $H(T,\tau)=X(T,\tau)B(\tau)$, $x^{(i)}(T,\tau)$ – i-я строка матрицы $X(T,\tau)=X(T)X^{-1}(\tau)$, $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x}=A(t)x$ такая, что $X(0)=E$, E – единичная матрица, $u(\cdot)\in U$.

Предположим, что вектор-функции $h^{(i)}(T,\tau)$ линейно зависимы на сегменте $[0, T]$. Рассмотрим матрицу

$$\widetilde{H}(t,\tau) = (\widetilde{h}^{(1)}(t,\tau)\ \ \widetilde{h}^{(2)}(t,\tau)\ \ldots\ \widetilde{h}^{(n)}(t,\tau)),$$

транспонированную к матрице $H(t,\tau)$. Введем обозначение $\overline{h}^{(i)}(t) = \widetilde{h}^{(i)}(T,t)$, $i=\overline{1,n}$.

Будем искать управление, удовлетворяющее системе (2), в виде линейной комбинации вектор-строк импульсной переходной матрицы $H(T,t)$ [2] или вектор-столбцов матрицы $\widetilde{H}(T,t)$

$$u(t) = l_1\overline{h}^{(1)}(t) + l_2\overline{h}^{(2)}(t) + \ldots + l_n\overline{h}^{n}(t), \qquad (3)$$

где $l_i, i=\overline{1,n}$, – некоторые числа.

Подставив (3) в (2), получим систему линейных уравнений для нахождения $l_i, i=\overline{1,n}$,

$$\begin{cases} \lambda_{11}l_1 + \lambda_{12}l_2 + \ldots + \lambda_{1n}l_n = c_1, \\ \quad\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{n1}l_1 + \lambda_{n2}l_2 + \ldots + \lambda_{nn}l_n = c_n, \end{cases} \qquad (4)$$

в которой $\lambda_{ij} = \int_0^T \left(\overline{h}^{(i)}(t), \overline{h}^{(j)}(t)\right)dt, i,j=\overline{1,n}$.

Нетрудно убедиться, что ранг основной матрицы $\{\lambda_{ij}\}_1^n$ системы (4) удовлетворяет условию $rang\{\lambda_{ij}\} = r, 0<r<n$.

Предположим, что линейно независимы первые r строк системы (4). Преобразуем эту систему к виду

$$\begin{gathered} \lambda_{11}l_1 + \ldots + \lambda_{1r}l_r + \ldots + \lambda_{1n}l_n = c_1, \\ \ldots\ldots \\ \lambda_{r1}l_1 + \ldots + \lambda_{rr}l_r + \ldots + \lambda_{rn}l_n = c_r, \\ 0 = c'_{r+1}, \\ \ldots\ldots \\ 0 = c'_n. \end{gathered} \qquad (5)$$

Теорема. Если выполняются равенства $c_j = -\sum_{k=1}^{r}\gamma_k^j c_k$, $j=\overline{r+1,n}$, где γ_k^j – число, то существует управление, удовлетворяющее системе (2) и имеющее наименьшую норму.

Доказательство. Пусть выполняется условие теоремы. Решением системы (5) является вектор $l = colon(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, координаты которого удовлетворяют равенствам $l_i = d_i + \sum_{j=r+1}^{n} k_j^i l_j$, где d_i, k_j^i, $i=\overline{1,r}$, $j=\overline{r+1,n}$, – известные числа, l_{r+1}, l_{r+2},..., l_n – свободные переменные.

Пусть $d = colon(d_1, d_2, \ldots, d_r, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-r})$, $K = colon(colon\left(k_{r+1}^1,\ldots,k_n^1\right),\ldots,colon\left(k_{r+1}^r,\ldots,k_n^r\right),$ $colon(1,0,\ldots,0),\ldots colon(0,0,\ldots,1))$.

Тогда управление $u^0(t)$, удовлетворяющее системе (2), определится так $\left(u^0(t)\right)' = \left(\bar{l}'\cdot K + d'\right)\overline{H}(t)$, где $\bar{l} = colon(l_{r+1},\ldots,l_n)$ $\overline{H}(t) = colon(\overline{h}^{(1)}(t),\ldots,\overline{h}^{(n)}(t))$, $d', \bar{l}'$ – вектор-строки.

Пусть

$$U_0 = \left\{u(t) : (u(t))' = \left(\bar{l}'\cdot K + d'\right)\overline{H}(t), \bar{l}' = \left(l_{r+1}\ l_{r+2}\ldots l_n\right)\right\}, \qquad (6)$$

и пусть $u(t)\notin U_0$ – некоторое решение системы (2). Убедимся, что $\|u(t)\| \geq \|u^0(t)\|$, $u^0(t)\in U_0$.

С этой целью рассмотрим разность $\varphi(t) = u(t) - u^0(t)$. Так как вектор-функции $u(t)$ и $u^0(t)$ удовлетворяют системе (2), то $\int_0^T\left(\overline{h}^{(i)}(t), \left[u(t)-u^0(t)\right]\right)dt = \int_0^T\left(\overline{h}^{(i)}(t), \varphi(t)\right)dt = 0$ или в векторной форме $\int_0^T \overline{H}(t)\varphi(t)dt = 0$. Тогда

$$\int_0^T\left(u^0(t), \varphi(t)\right)dt = \int_0^T\left(\left(\bar{l}'K + d'\right)\overline{H}(t), \varphi(t)\right)dt =$$

$= \int_0^T \left(\bar{l}'K\overline{H}(t), \varphi(t)\right)dt + \int_0^T \left(d'\overline{H}(t), \varphi(t)\right)dt = 0,$ что доказывает ортогональность $\varphi(t)$, $u^0(t)$.

С другой стороны, можно убедиться, что всякая вектор-функция $u(t) = u^0(t) + \varphi(t)$, где $u^0(t) \in U_0$, $\varphi(t)$ – произвольная вектор-функция, ортогональная к $\bar{h}^{(i)}(t), i \in \{1,2,...,n\}$, является управлением, удовлетворяющим системе (2), при этом $\varphi(t)$ и $u^0(t)$ будут ортогональны.

Имеем $\|u(t)\|^2 = \int_0^T u^2(t)dt = \int_0^T \left[u^0(t) + \varphi(t)\right]^2 dt =$
$= \int_0^T \left(u^0(t)\right)^2 dt + 2\int_0^T \left(u^0(t), \varphi(t)\right)dt + \int_0^T \varphi^2(t)dt.$

В силу ортогональности $\varphi(t)$ и $u^0(t)$ второе слагаемое равно нулю; третье слагаемое неотрицательно, следовательно, $\|u(t)\|^2 \geq \|u^0(t)\|^2$, откуда $\|u(t)\| \geq \|u^0(t)\|$.

Аналогичным образом можно установить, что управление $\left(\bar{u}^0(t)\right)' = d'\overline{H}(t)$ удовлетворяет неравенству $\|u^0(t)\| \geq \|\bar{u}^0(t)\|, u^0(t) \in U_0$ и, следовательно, является наименьшим по норме среди всех управлений, разрешающих систему (2). Теорема доказана.

4. Исследование уровня доходности инвестиционного портфеля. Будем рассматривать решение $x(t) = \int_0^t X(t,\tau)F(\tau)d\tau + \int_0^t H(t,\tau)u(\tau)d\tau$ системы (1) при любом $u(\cdot) \in U$.

Определение. Множество $W \subset R^n$ называется множеством достижимости системы (1), если при любом управлении $u(\cdot) \in U$ точка $x(T) \in W$.

Найдем множество достижимости управляемой системы (1) при условии, что $u(.) \in U_0$, определенного равенством (6).

Координаты конечного состояния определяются так

$$x_i(T) = \int_0^T \left(x^{(i)}(T,\tau), F(\tau)\right)d\tau + \int_0^T \left(h^{(i)}(T,\tau), u(\tau)\right)d\tau .$$

Пусть $x(T) = \beta = colon(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$. Учитывая, что $u(\cdot) \in U_0$, найдем

$$\beta_i = \int_0^T \left(x^{(i)}(T,\tau), F(\tau)\right)d\tau + \int_0^T \left(\bar{h}^{(i)}(\tau), \left[\bar{l}'K + d'\right]\overline{H}(\tau)\right)d\tau =$$
$$= \mu_i + \int_0^T \left(\bar{h}^{(i)}(\tau), \bar{l}'K\,\overline{H}(\tau)\right)d\tau, i = \overline{1,n},$$

где $\mu_i = \int_0^T \left(x^{(i)}(T,\tau), F(\tau)\right)d\tau + \int_0^T \left(\bar{h}^{(i)}(\tau), d'\overline{H}(\tau)\right)d\tau$ – известные числа.

Получим систему

$$\mu + P\bar{l} = \beta . \qquad (7)$$

При этом

$p^{(i)} = \left\{p_{ij}, j = \overline{1, n-r}\right\} = \int_0^T \bar{h}^{(i)\,\prime}(t)\overline{H}'(t)K'dt$ – i-я строка матрицы P, $i = \overline{1,n}$.

Определим множество W такое, что при всяком $\beta \in W$ система (7) имеет решение.

Рассмотрим следующие случаи:

1) пусть $rangP = 0$. Тогда при любых $i \in \{1,2,...,n\}, j \in \{1,2,...,n-r\}$ $p_{ij} = 0.$ Следовательно, множество достижимости состоит из одной точки $\beta = \mu = colon(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$;

2) пусть $rangP = n - r$. В этом случае можно доказать, что множеством достижимости W является пространство векторов $\beta \in R^n$, первые r координат которых произвольны, а остальные $n - r$ удовлетворяют соотношениям $\beta_j + \sum_{k=1}^{n-r}\alpha_k^j\beta_k = \mu_j + \sum_{k=1}^{n-r}\alpha_k^j\mu_k$, где α_k^j – известное число;

3) пусть $rangP = s, \quad 0 < s < n - r$. Тогда множество W есть совокупность векторов $\beta \in R^n$, у которых s координат – произвольные действительные числа, а остальные $n - s$ удовлетворяют равенствам $\beta_j + \sum_{k=1}^{s}\eta_k^j\beta_k = \mu_j + \sum_{k=1}^{s}\eta_k^j\mu_k$, числа η_k^j определяются в результате преобразований.

5. Выводы. Итак, предложен способ нахождения управляющих воздействий для достижения желаемого объема капитала (следовательно, желаемой доходности) при формировании инвестиционного портфеля. Данный метод может быть применен для более общей модели, когда возможны инвестиции заемных средств и использование части доходов на потребление.

Исследовано множество достижимости системы (1), то есть определен уровень доходности ИП при выбранном виде управляющих воздействий.

Библиографический список

1. *Герасимов Е.С.* Динамическая сетевая модель управления инвестициями при квадратичной функции риска // Автоматика и телемеханика . 2002. – №2. – С. 119–128.

2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. – М. : Наука, 1968. – 476 с.