Квазипорядковая размерность

Подготовила: Русакова Е.А., гр.342.
Руководитель: Шматков В.Д.

Квазипорядком называют отношение, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1)\ i \leq i;$$

$$2)\ i \leq k,\ k \leq i \rightarrow i \leq j.$$

Известен факт, что любой квазипорядок R можно представить как пересечение «гантелек»:

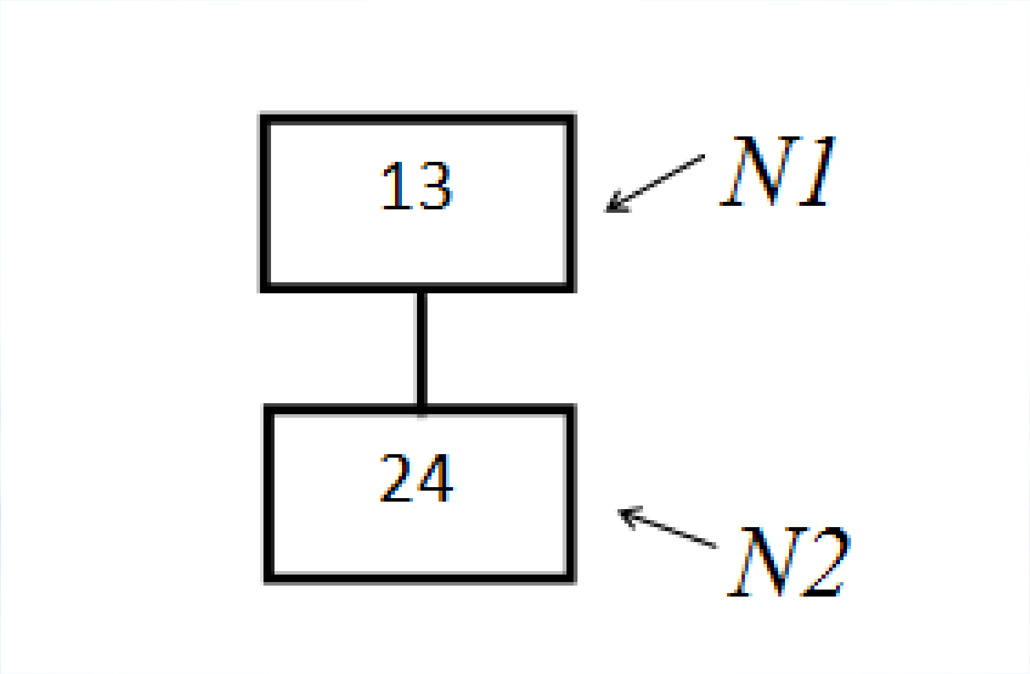
$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \cdots \cap \Gamma_k = R$$

Дано множество $N = \{1,\ 2,\ \dots, n\}$. Рассматривается разбиение множества N, где $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, такое что:

* Если $i, j \in N_1$, то $(i, j) \in \Gamma$, $(j, i) \in \Gamma$;
* Если $i, j \in N_2$, то $(i, j) \in \Gamma$, $(j, i) \in \Gamma$;
* Если $i \in N_1$, $j \in N_2$, то $(i, j) \in \Gamma$;
* В остальных случаях – (i, j) не принадлежит отношению Γ.

Отношение Γ можно представить в виде гантелек:

$$N = \{1, 2, 3, 4\}$$



Решим следующую задачу:

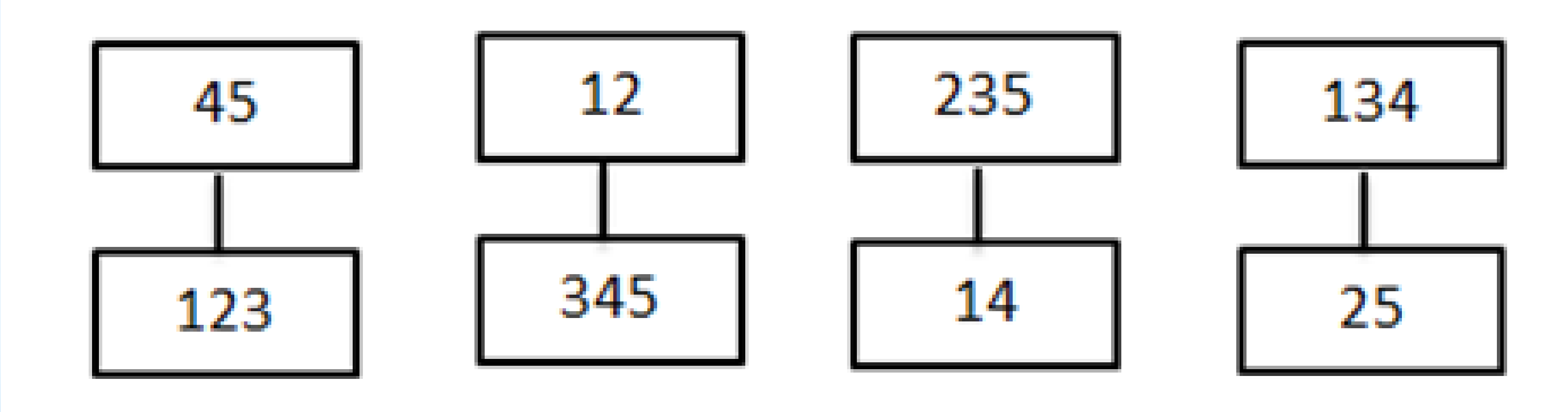
Найти минимальное число k , такое что для каких-то гантелек пересечение этих k гантелек было равно пустому множеству.

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \dots \cap \Gamma_k = \emptyset$$

Решим данную задачу для числа элементов множества N равным n=4.

1-2	*2-1*	*3-1*	*4-1*	*5-1*
1-3	*2-3*	*3-2*	*4-2*	*5-2*
1-4	*2-4*	*3-4*	*4-4*	*5-3*
1-5	*2-5*	*3-5*	*4-5*	*5-4*

Гантельки можно построить следующим образом:



* На первом шаге мы удалим пары 1-4, 1-5, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5:

1-2	*2-1*	*3-1*	*4-1*	*5-1*
1-3	*2-3*	*3-2*	*4-2*	*5-2*
~~*1-4*~~	~~*2-4*~~	~~*3-4*~~	*4-4*	*5-3*
~~*1-5*~~	~~*2-5*~~	~~*3-5*~~	*4-5*	*5-4*

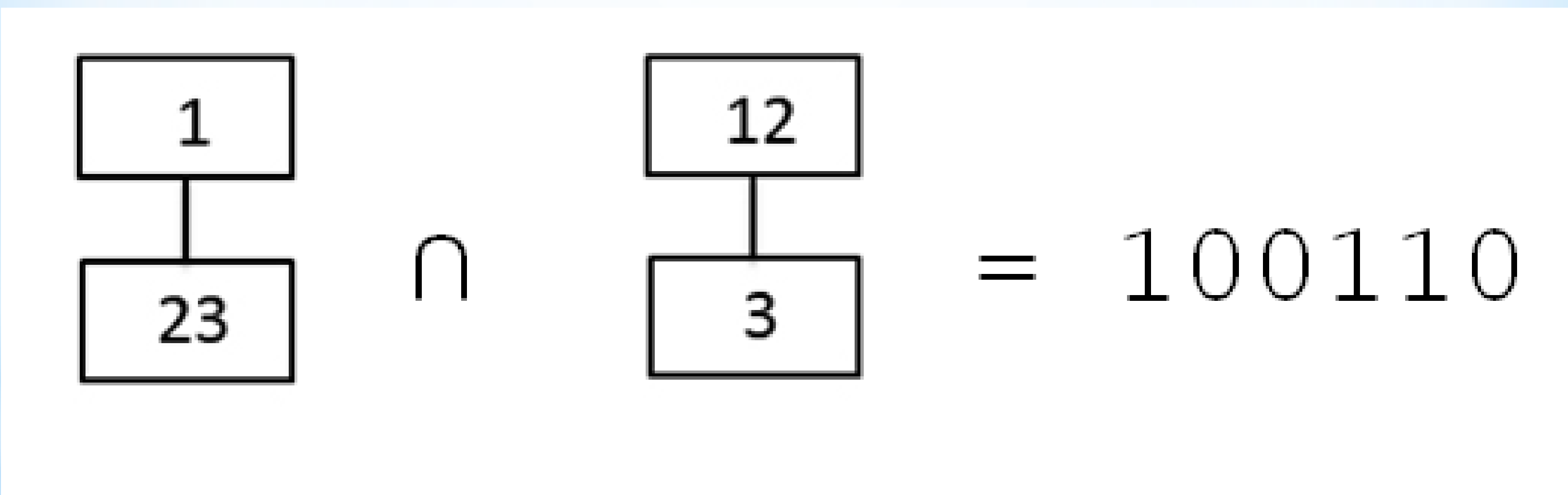
* На втором шаге пары 3-1, 3-2, 4-1, 4-2, 5-1, 5-2:

1-2	*2-1*	~~*3-1*~~	~~*4-1*~~	~~*5-1*~~
1-3	*2-3*	~~*3-2*~~	~~*4-2*~~	~~*5-2*~~
~~*1-4*~~	~~*2-4*~~	~~*3-4*~~	*4-4*	*5-3*
~~*1-5*~~	~~*2-5*~~	~~*3-5*~~	*4-5*	*5-4*

n	k
4	4
5	4
6	5
7	5
8	6
9	6
10	7
11	7
12	8
13	8

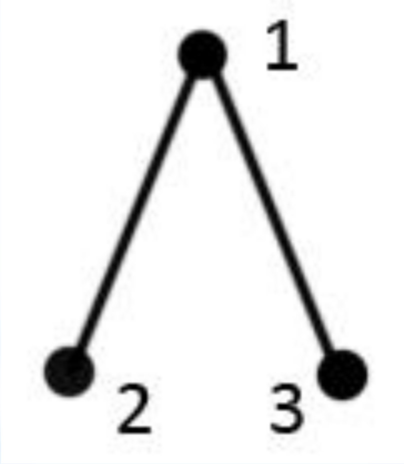
Но для значений $n > 13$ метод не является наиболее оптимальным. При повторных вычислениях была выдвинута гипотеза, что оценка $k = 2 \times [\log_2 n + 1]$ или метод «половинного деления» является оптимальным для значений $n > 13$.

Любой квазипорядок можно закодировать числом. Например:



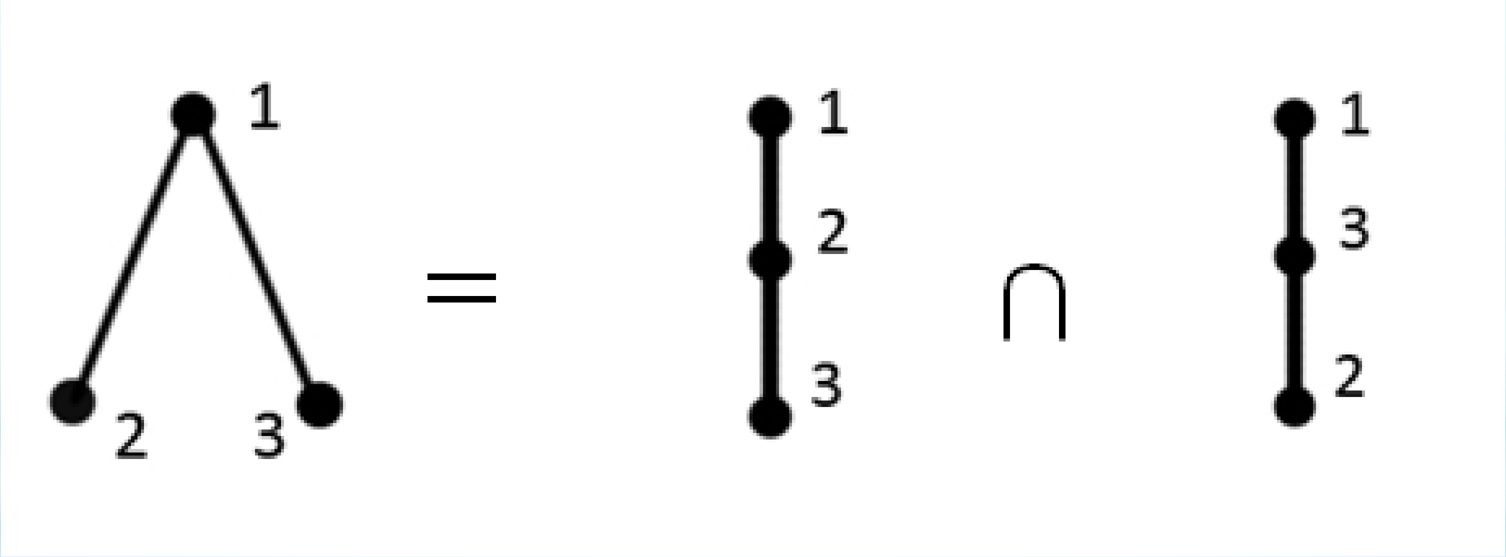
Каждая цепь из n элементов является пересечением $n-1$ гантельки, поэтому получаем оценку, что каждое направленное дерево является пересечением $2 \times (n-1)$ гантельки.

Дано дерево:

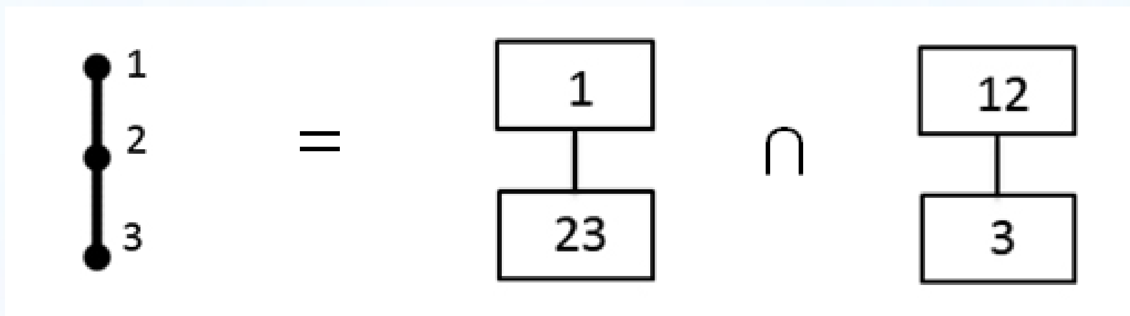


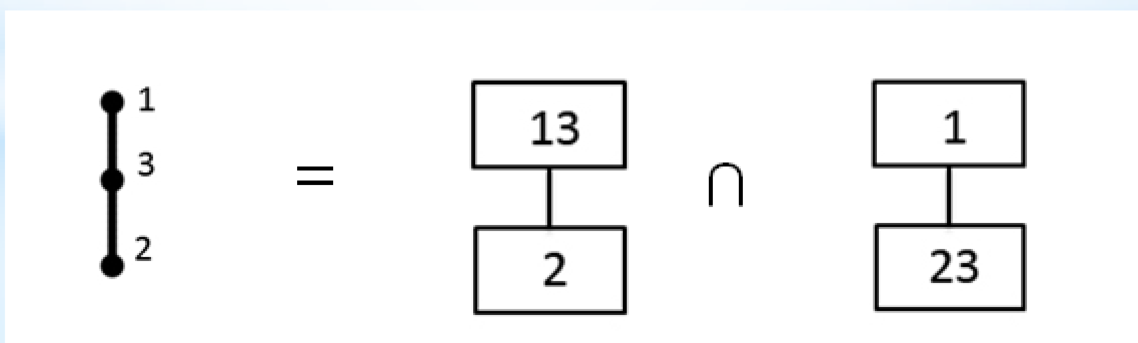
Представить данное дерево сначала в виде цепей, затем в виде гантелек.

* 1 шаг. Представим дерево в виде пересечения цепей.

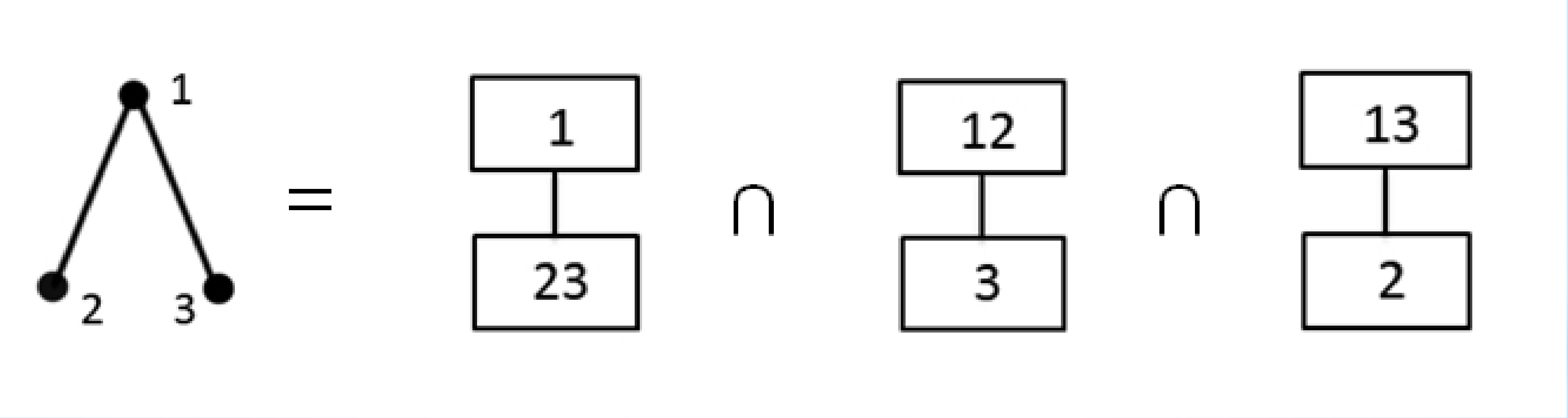


* 2 шаг. Представим каждую цепь в виде пересечения гантелек.

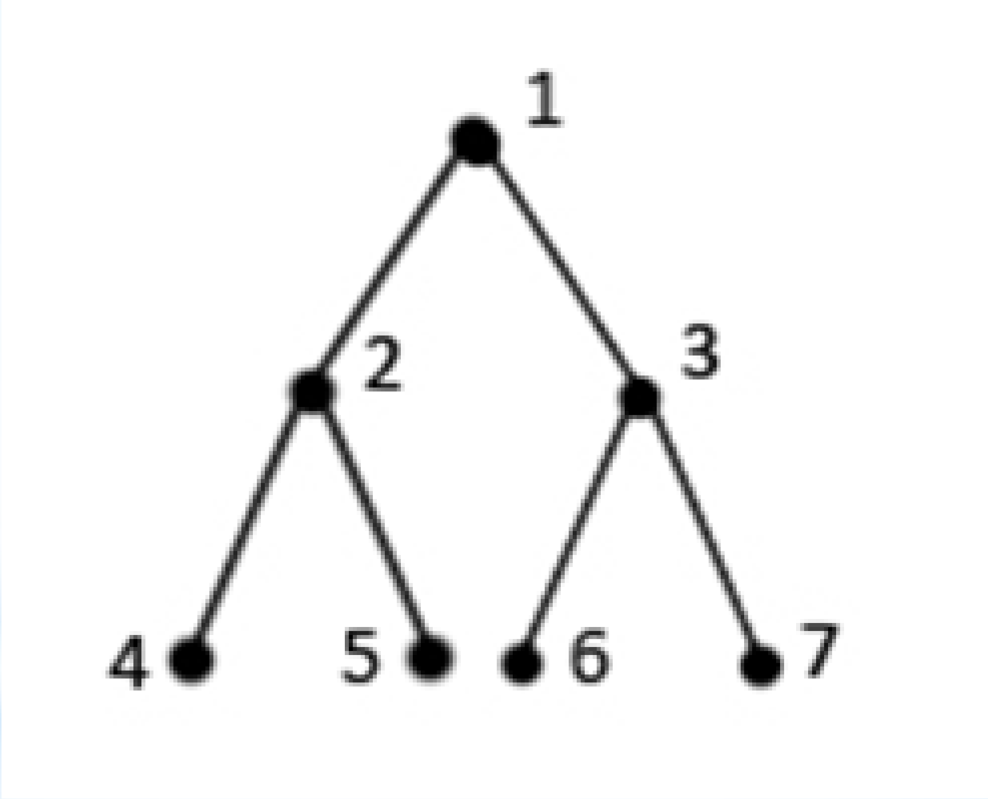


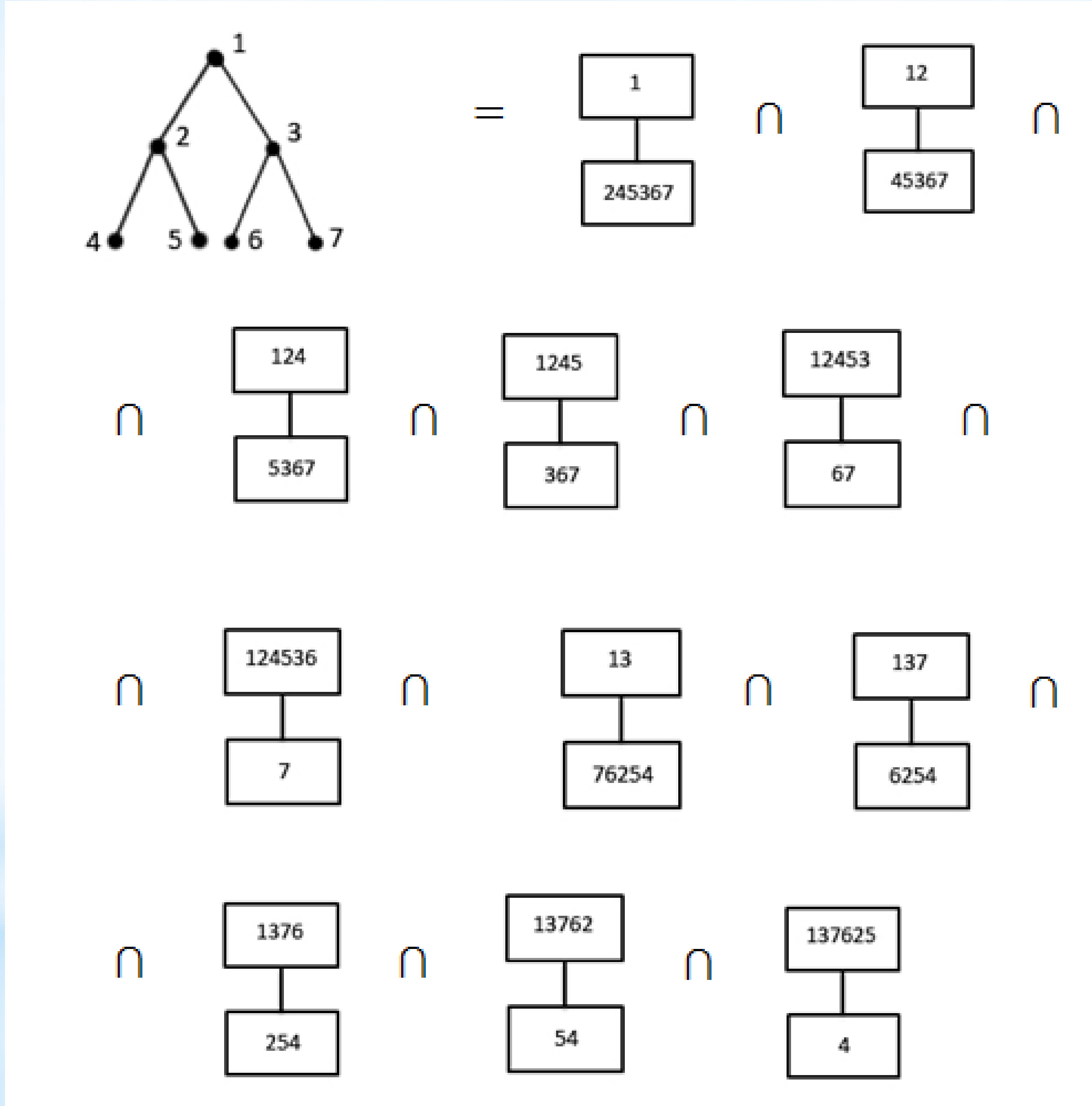


3 шаг. Представим дерево в виде пересечения гантелек.



* Дано дерево:





1
2
3
4
5
6
7
=
1
245367
∩
12
45367
∩
124
5367
∩
1245
367
∩
12453
67
∩
124536
7
∩
13
76254
∩
137
6254
∩
1376
254
∩
13762
54
∩
137625
4

* Каждый частичный порядок можно представить в виде пересечения цепей. Минимальное число таких цепей назовем порядковой размерностью.
* Мы введем аналогичное понятие – квазипорядковая размерность.

* Спасибо за внимание!