

**Всероссийская студенческая физико-математическая олимпиада
имени Георгия Николаевича Шуппе
Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
28-31 марта 2025 года**

Задача 1. Пусть дана квадратная матрица A_n порядка $2n+1$ такая, что ее центральный элемент равен 0, квадрат вокруг центрального элемента состоит из 1 и -1, причем элементы ниже и правее центрального отрицательны, остальные – положительны; следующий квадрат состоит из 2 и -2, и так далее. Вычислить определитель матрицы A_{2025} .

Пример матрицы A_n : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n & n & n & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & n-2 & n-2 & n-2 & n-2 & n-2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & \dots & -n+2 & -n+1 & -n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & -1 & -1 & -2 & \dots & -n+2 & -n+1 & -n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 2 & -2 & -2 & -2 & \dots & -n+2 & -n+1 & -n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & n-2 & n-2 & -n+2 & -n+2 & -n+2 & \dots & -n+2 & -n+1 & -n \\ n & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 & -n+1 & -n+1 & -n+1 & \dots & -n+1 & -n+1 & -n \\ n & n & n & \dots & n & n & -n & -n & -n & \dots & -n & -n & -n \end{vmatrix}$$

Вычтем из центральной строки следующую за ней. Затем прибавим к каждой строке из нижней половины симметричную строку из верхней половины. Затем вычтем из каждой строки с номерами с 1 по $n-1$ следующую. Получим:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2n & 2n-2 & 2n-4 & \dots & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2n & 2n-2 & 2n-4 & \dots & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n & 2n-2 & 2n-4 & \dots & 2n-4 & 2n-4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2n & 2n-2 & 2n-2 & \dots & 2n-2 & 2n-2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2n & 2n & 2n & \dots & 2n & 2n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Из каждого столбца из левой половины вычтем симметричный столбец из правой половины. Из каждой строки из нижней половины (номера с $n+2$ до $2n$) вычтем следующую.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -2 & \dots & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2n & 2n & 2n & \dots & 2n & 2n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Разложим данный определитель по центральной строке, а затем – по последнему столбцу. Получим следующий определитель:

$$\Delta_n = (-1)^n n \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -2 & \dots & -2 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2n & 2n & 2n & \dots & 2n & 2n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из 2 столбца последний, из 3 – предпоследний, и так далее. Затем поменяем первую и последнюю строку, вторую и предпоследнюю, и так далее. Так как порядок определителя равен $2n-1$, будет произведена $n-1$ перестановка строк.

$$\Delta_n = (-1)^n n \cdot (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 2n & 2n & 2n & \dots & 2n & 2n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & -2 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Последовательное разложение по столбцам (до строки с номером n), а затем – по строкам, даст следующее выражение для определителя: $\Delta_n = (-1)^n n^2 \cdot 2^n$.

Ответ: $\det(A_{2025}) = -2025^2 \cdot 2^{2025}$

Задача 2. Пусть G – множество всех невырожденных квадратных матриц n -го порядка. Матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ является перестановочной с каждой матрицей из множества G (относительно операции произведения матриц). Известно, что для всех i и j выполняется: $|a_{ij}| \leq 2025$. Найти максимально возможное значение определителя матрицы A .

Решение.

Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ перестановочна с каждой матрицей множества G .

Рассмотрим матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, содержащуюся в множестве G ,

и найдем произведения AB и BA данных матриц.

Пусть $C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$. Обозначим $C' = BA = \begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} & \dots & c'_{1n} \\ c'_{21} & c'_{22} & \dots & c'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c'_{i1} & c'_{i2} & \dots & c'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c'_{n1} & c'_{n2} & \dots & c'_{nn} \end{pmatrix}$.

Тогда для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 2, 3, \dots, n$ будут справедливы равенства $c_{ij} = a_{i(j-1)} + a_{ij}$, (1)

и также для всех $i = 1, 2, \dots, n-1$ и $j = 1, 2, \dots, n$ будут верны равенства $c'_{ij} = a_{(i+1)j} + a_{ij}$, (2)

следовательно, для всех $j = 2, 3, \dots, n$ и $i = 1, 2, \dots, n-1$ будут выполняться равенства $a_{(i+1)j} = a_{i(j-1)}$. (3)

Из перестановочности матриц A и B следует равенство всех столбцов матриц C и C' , в

частности первых $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{i1} \\ \dots \\ a_{(n-1)1} \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} \\ a_{21} + a_{31} \\ a_{31} + a_{41} \\ \dots \\ a_{i1} + a_{(i+1)1} \\ \dots \\ a_{(n-1)1} + a_{n1} \\ a_{nn} \end{pmatrix}$, откуда следует, что элементы первого столбца

матрицы A (кроме a_{11}) – нулевые. Тогда, в силу формулы (3), получим систему равенств

$$a_{21} = a_{32} = a_{43} = \dots = a_{n(n-1)} = 0, a_{31} = a_{42} = \dots = a_{n(n-2)} = 0, a_{(n-1)1} = a_{n2} = 0. (4)$$

В силу данной системы равенств (4) получаем, что все элементы матрицы A , стоящие ниже ее главной диагонали – нулевые. Далее отметим, что поскольку матрица A является перестановочной

с каждой матрицей множества G , то и транспонированная матрица A^T также будет являться перестановочной с каждой матрицей множества G , поскольку для любой матрицы H из G будет выполняться равенство $A^T H = (H^T A)^T = (A H^T)^T = H A^T$.

Тогда, как мы показали выше, в матрице A^T все ее элементы, стоящие ниже главной диагонали – должны быть нулевыми. Следовательно, сама матрица A имеет диагональный вид. Заметим, что из равенств (3), полагая $j = i + 1$, получим, что $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn}$.

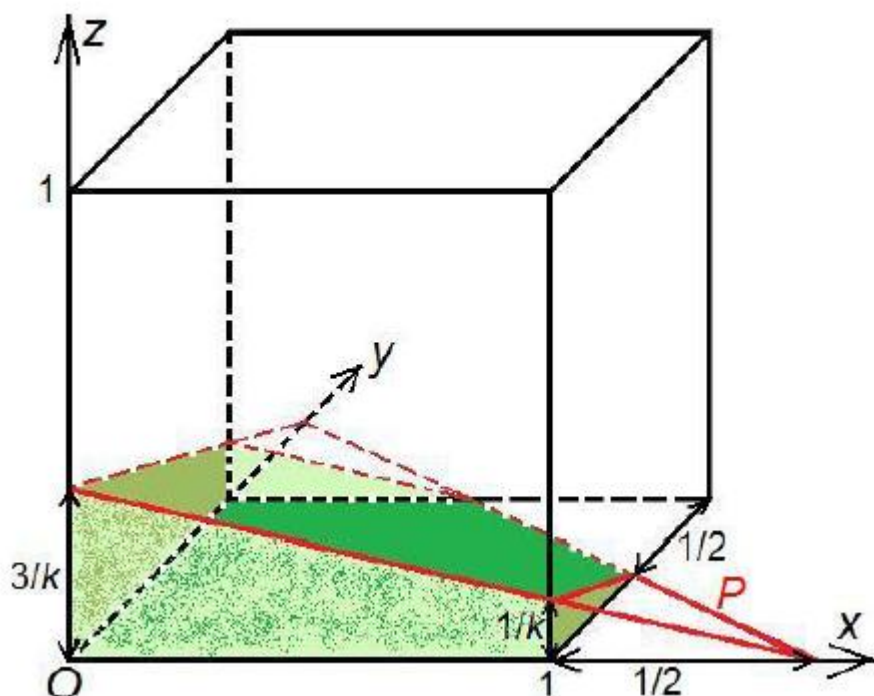
Следовательно, матрица A necessarily имеет вид $A = \lambda E$, где $\lambda \neq 0$. Следовательно, определитель такой матрицы равен $\det A = \lambda^n$. Максимальное значение достигается при $\lambda = 2025$.

Ответ: $\max(\det A) = 2025^n$.

Задача 3. Константа k выбрана так, что под плоскостью $P = \{2x + 2y + kz = 3\}$ лежит $1/3$ площади поверхности куба $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. Какая часть его объема лежит под плоскостью P ?

Решение.

Плоскость P при любом значении константы k пересекает плоскость Oxy по прямой $\{x + y = 3/2\}$. Ниже плоскости P оказывается пятиугольная часть нижней грани куба площадью $7/8$. Если $k < 3$, то точка $(0; 0; 1)$ будет ниже P , то есть ниже P окажется не менее $2/3$ передней грани (трапеция высотой 1 и основаниями 1 и $1/3$) и не менее $2/3$ левой грани (аналогично), итого $4/3 + 7/8 > 2$ единиц площади, что нас не устраивает. Следовательно, $k \geq 3$.



Часть поверхности куба, лежащая ниже P , состоит из пятиугольника площадью $7/8$, двух трапеций и двух прямоугольных треугольников. Суммарная площадь равна

$$\frac{7}{8} + 2 \cdot \frac{\frac{3}{k} + \frac{1}{k}}{2} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}}{2} = \frac{7}{8} + \frac{9}{2k} = 2, \text{ откуда } k = 4.$$

Часть куба, лежащая ниже P , есть прямоугольный тетраэдр с катетами $3/2, 3/2, 3/k$, от которого отсечены два прямоугольных тетраэдра с катетами $1/2, 1/2, 1/k$. Объем этой части равен

$$\frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{k}}{6} - 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}}{6} = \frac{27 - 2 \cdot 1}{24k} = \frac{25}{24k} = \frac{25}{96}.$$

Ответ: 25/96.

Задача 4. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{2024} + \sqrt[n]{2025} - 1 \right)^n$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{2024} + \sqrt[n]{2025} - 1 \right)^n = a &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(2024^{1/n} + 2025^{1/n} - 1 \right) = [\infty \cdot 0] = \ln a, \\ n = \frac{1}{x} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2024^x + 2025^x - 1)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2024^x \ln 2024 + 2025^x \ln 2025}{2024^x + 2025^x - 1} = \\ &= \ln 2024 + \ln 2025 = \ln a \Rightarrow a = 2024 \cdot 2025 = \underline{4098600}. \end{aligned}$$

Задача 5. Вычислить $f^{(2024)}(1)$ и $f^{(2025)}(1)$, если $f(x) = \ln(2x - x^2)$.

Решение.

Заметим, что $f(x) = \ln(1 - (x-1)^2)$. Следовательно, $f(x) = g(x-1)$, где

$g(t) = \ln(1 - t^2) = \ln(1-t) + \ln(1+t)$. Производная n -го порядка для каждого из слагаемых при $|t| < 1$ известна:

$$g^{(n)}(t) = \frac{-(n-1)!}{(1-t)^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^{n-1}} = (n-1)! \left(\frac{-1}{(1-t)^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{(1+t)^{n-1}} \right).$$

$$g^{(n)}(0) = (n-1)!(-1 + (-1)^{n-1}).$$

Очевидно, что для нечетного n $g^{(n)}(0) = 0$, а для четного n получим $g^{(n)}(0) = -2 \cdot (n-1)!$.

Ответ: $f^{(2024)}(1) = -2 \cdot 2023!$, $f^{(2025)}(1) = 0$.

Задача 6. Вычислить интеграл $\int_0^4 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) dx$.

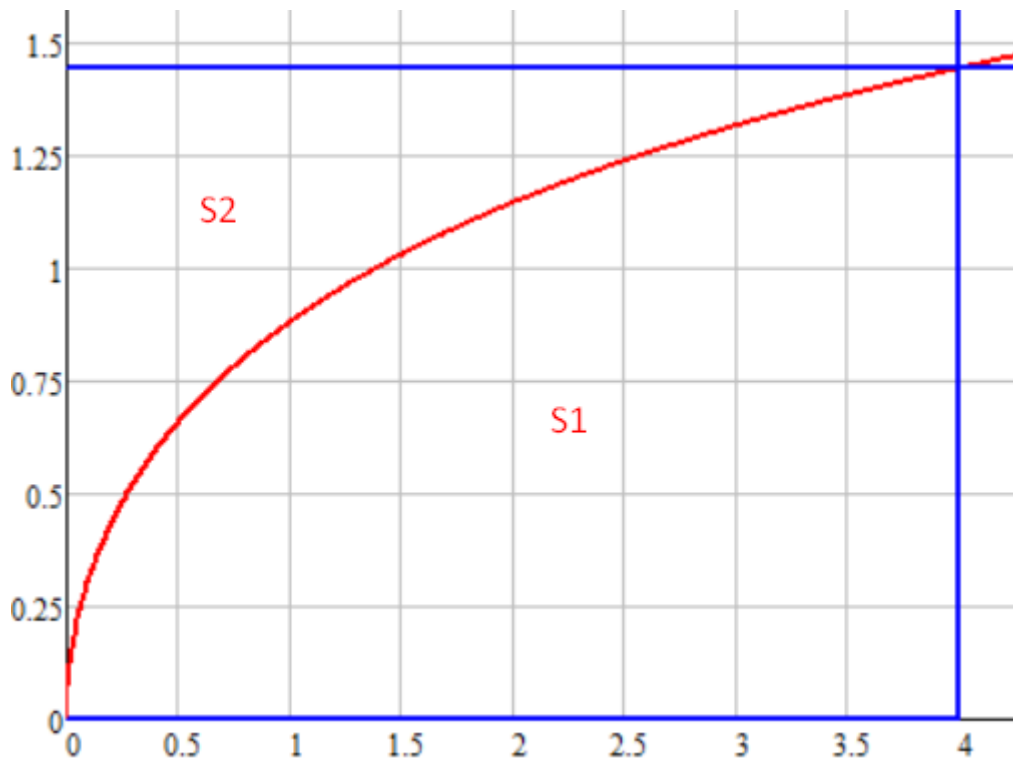
Решение.

Заметим, что $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Действительно, уравнение $\operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$ может

быть переписано в виде $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$ имеет положительное решение $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$, откуда и следует равенство.

Тогда $\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = \operatorname{arsh} \sqrt{x}$. Следовательно, подынтегральная функция $y = \operatorname{arsh} \sqrt{x}$

является обратной для функции $x = \operatorname{sh}^2 y = \frac{\operatorname{ch} 2y - 1}{2}$. При этом $y(0) = 0$, $y(4) = \ln(2 + \sqrt{5})$.



$$\begin{aligned}
 S_2 &= \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \frac{\operatorname{ch} 2y - 1}{2} dy = \left(\frac{\operatorname{sh} 2y}{4} - \frac{y}{2} \right) \Big|_0^{\ln(2+\sqrt{5})} = \frac{1}{8} \left(e^{2\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-2\ln(2+\sqrt{5})} \right) - \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2} = \\
 &= \frac{1}{8} \left((2+\sqrt{5})^2 - \frac{1}{(2+\sqrt{5})^2} \right) - \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2} = \frac{(8+4\sqrt{5})(10+4\sqrt{5})}{8(9+4\sqrt{5})} - \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2} = \\
 &= \frac{20+9\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}} - \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2} = (20+9\sqrt{5})(9-4\sqrt{5}) - \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2} = \sqrt{5} - \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \int_0^4 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) dx = S_1 = 4\ln(2+\sqrt{5}) - \left(\sqrt{5} - \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2} \right) = \frac{9}{2}\ln(2+\sqrt{5}) - \sqrt{5}.$$

Задача 7. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint_{\Sigma} (x^4 + 2y^2z^2) dS$ по поверхности

$$\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 3\}.$$

Решение.

Из симметрии Σ очевидно равенство интегралов:

$$J = \iiint_{\Sigma} (x^4 + 2y^2z^2) dS = \iiint_{\Sigma} (y^4 + 2z^2x^2) dS = \iiint_{\Sigma} (z^4 + 2x^2y^2) dS.$$

Если их сложить, получим:

$$3J = \iiint_{\Sigma} (x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2z^2x^2 + 2y^2z^2) dS = \iiint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)^2 dS = \iiint_{\Sigma} 9 dS = 9S(\Sigma).$$

Так как поверхность представляет собой сферу радиуса $\sqrt{3}$, то площадь этой сферы равна $4\pi(\sqrt{3})^2 = 12\pi$, откуда $3J = 9 \cdot 12\pi = 108\pi$, $J = 36\pi$.

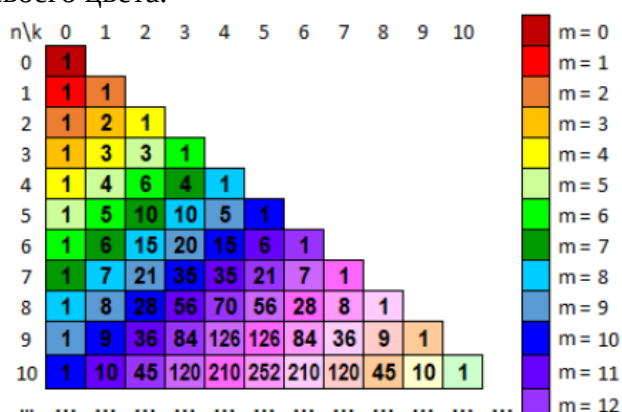
Ответ: $J = 36\pi$.

Задача 8. Вычислить предел $\lim_{M \rightarrow \infty} \sqrt[M]{\sum_{k+n \leq M} C_n^k}$.

Решение.

Представим подкоренную сумму в виде $\sum_{m=0}^M s_m$, где $s_m = \sum_{k+n=m} C_n^k$. Выведем рекуррентное

соотношение для s_m . Покрасим треугольник Паскаля так, чтобы каждая s_m была суммой ячеек своего цвета.



Из рекуррентного соотношения $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ мы видим, что ячейки каждого следующего цвета складываются из двух предыдущих: $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$. База рекурсии $s_0 = s_1 = 1$. Получаем, что s_{m-1} – это m -й член последовательности Фибоначчи. Тогда $s_m = A \cdot q^m + B \cdot r^m$, где

$q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $A > 0$, $B \neq 0$ – некоторые константы. Получаем:

$\sum_{m=0}^M s_m = A \cdot \frac{q^{M+1} - 1}{q - 1} + B \cdot \frac{r^{M+1} - 1}{r - 1} = C \cdot q^M + O(1)$. Тогда исходный предел равен $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 9. Найти собственные функции и собственные значения квантовомеханического оператора

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx}.$$

Решение.

Для решения дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} \right) \psi = \lambda \psi \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d \psi}{dx} = \lambda \psi$$

введем новую функцию $v = x\psi$, при этом получим уравнение (проверьте!):

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \lambda v,$$

решением которого являются

$$v_1 = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} \text{ и } v_2 = C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}.$$

Для $\lambda = -\beta^2 < 0$ эти функции будут конечными при $x \rightarrow \pm\infty$. Однако, чтобы обеспечить конечность $\psi(x)$ в точке $x = 0$, нужно, взяв линейную комбинацию обоих решений

$$\psi(x) = \frac{C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}}{x},$$

потребовать обращение числителя в нуль вместе со знаменателем (при $x = 0$).

Следовательно,

$$C_1 + C_2 = 0 \text{ и } \psi(x) = C \frac{\sin \beta x}{x}, \text{ где } \beta \in \mathbf{R}.$$

Задача 10. Цилиндрическое ведро имеет отверстие в дне. Если ведро наполовину наполнить ртутью, оно опустеет за час. Успеет ли то же количество ртути вытечь из ведра за 48 минут, если поверх ртути налить воду до краев? Скорость вытекания пропорциональна квадратному корню из давления. Вода легче ртути в 13,5 раз.

Решение.

Примем половину высоты ведра за единицу глубины, час – за единицу времени, и будем отсчитывать время в обратную сторону от момента вытекания последней капли ртути. Если в ведро налита только ртуть до высоты 1, то

$$\frac{dh}{dt} = c\sqrt{h}, \text{ откуда } \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = 2\sqrt{h} = ct. \text{ Так как } h(0) = 0 \text{ и } h(1) = 1, \text{ получим } c = 2.$$

Если поверх ртути налит слой воды высотой 1, добавляющий такое же давление, как слой ртути высотой $2/27$, то:

$$\frac{dh}{dt} = 2\sqrt{h + \frac{2}{27}}. \text{ Откуда } \int \frac{dh}{\sqrt{h + \frac{2}{27}}} = 2\sqrt{h + \frac{2}{27}} = 2(t + C).$$

$$\text{При } h = 0 \text{ имеем } t = 0 = \sqrt{\frac{2}{27}} - C.$$

$$\text{При } h = 1 \text{ имеем } t = t_1 = \sqrt{1 + \frac{2}{27}} - C, \text{ где } t_1 - \text{ время вытекания ртути. Получаем:}$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{29} - \sqrt{2}}{\sqrt{27}}. \text{ Сравним это время с 48 минутами, то есть } 5/6 \text{ часа.}$$

$$\frac{\sqrt{29} - \sqrt{2}}{\sqrt{27}} < \frac{5}{6}, \quad 6(\sqrt{29} - \sqrt{2}) < 5\sqrt{27}, \quad 36(31 - 2\sqrt{58}) < 675, \quad 441 < 72\sqrt{58}, \text{ что верно, так}$$

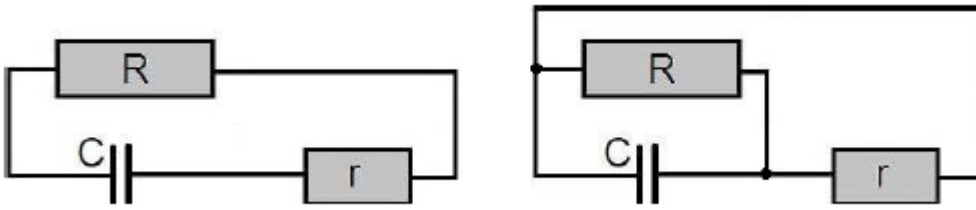
$$\text{как } 441 < 490 = 70\sqrt{49} < 72\sqrt{58}.$$

Следовательно, вся ртуть вытечет меньше, чем за 48 минут.

Ответ: успеет.

Задача 11. Дан конденсатор, имеющий заряд 8 мКл, и два сопротивления R и r . Сначала конденсатор разряжался 10 с через R и r , соединенные последовательно (рис. слева), и его заряд

уменьшился до 4 мКл. Затем конденсатор разряжался 10 с через R и r , соединенные параллельно (рис. справа), и его заряд уменьшился до 125 мКл. Найти R/r .



Решение.

При последовательном соединении R и r получается сопротивление $R + r$, а при параллельном — $\frac{Rr}{R+r}$.

При разрядке конденсатора емкостью C через сопротивление R заряд уменьшается по закону $Q(t) = Q(0)e^{-t/RC}$. За первые 10 с заряд уменьшился в 2 раза, а за вторые 10 с — в $32 = 2^5$ раза, поэтому получаем соотношение:

$$R + r = 5 \cdot \frac{Rr}{R+r}, (R+r)^2 = 5 \cdot Rr, \left(\frac{R}{r} + 1\right)^2 = 5 \cdot \frac{R}{r}.$$

Пусть $R/r = x$. Тогда $(x+1)^2 = 5x$, $x^2 - 3x + 1 = 0$, откуда $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Если считать, что

$$R > r, \text{ то } \frac{R}{r} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\frac{R}{r} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Задача 12. Считая электронный газ в металле максвелловским с плотностью распределения

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right),$$

где m — масса электрона, T — температура, v_x, v_y, v_z — проекции скоростей, найти плотность тока термоэлектронной эмиссии. Плотность электронов в металле — n_0 .

Решение.

Так как вероятность того, что скорость электрона лежит в интервалах $[v_x + dv_x]$, $[v_y + dv_y]$, $[v_z + dv_z]$ равна

$$dw = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z,$$

то плотность тока по направлению Ox , перпендикулярной поверхности металла равна

$$j = n_0 e \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{v_0}^{+\infty} v_x \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{m(v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right) dv_y dv_z.$$

Нижний предел интегрирования в первом интеграле выбран из соображений того, что скорость электрона ограничена его работой выхода из металла. Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{m(v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right) dv_y dv_z = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right) dv_y \right]^2 = \frac{2\pi kT}{m}$$

и

$$\int_{v_0}^{+\infty} v_x \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x = \frac{2kT}{m} \exp\left(-\frac{mv_0^2}{2kT}\right),$$

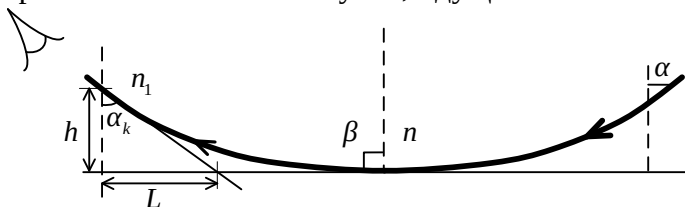
Получаем

$$j = \frac{n_0 e}{4} \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{A_{\text{вблх}}}{kT}\right) = \frac{n_0 e}{4} \bar{v} \exp\left(-\frac{A_{\text{вблх}}}{kT}\right).$$

Задача 13. Пятеро трезвых путников оказались посреди широкой плоской степи в Астраханской области и увидели на расстоянии 250 метров озеро, ошибочно приняв его за Баскунчак. Однако при попытке приблизиться, «озеро» все время удалялось, так что расстояние до него оставалось прежним. Объясните, что увидели путники и оцените температуру T у поверхности Земли если: рост путников 1,7 м; показатель преломления света на этой высоте $n_1 = 1,0002623$; температуру воздуха на высоте, большей 1м, считать постоянной и равной $T_1 = 30^\circ\text{C}$. Считать давление постоянным, а для показателя преломления принять $(n-1)$ пропорциональным плотности частиц в газе.

Решение.

Путники наблюдали полное внутреннее отражение световых лучей. Так как летом воздух прогревается неравномерно, температура около Земли выше, а, следовательно, показатель преломления световых лучей, идущих от неба меньше (см.рис.).



Пусть n – показатель преломления света для воздуха у поверхности Земли, n_1 – показатель преломления в точке наблюдения, α_k – критический угол, при котором виден мираж. По закону преломления света:

$$n \sin \beta = n_1 \sin \alpha_k$$

Так как $\sin \beta = 1$, то $n = n_1 \sin \alpha_k$.

Далее

$$\sin \alpha_k = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}}$$

Тогда показатель преломления у поверхности Земли

$$n = n_1 \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}} = \frac{250 \cdot 1.0002623}{\sqrt{250^2 + 1.7^2}} = 1.0002392.$$

По условию задачи, $(n-1) \sim \rho$, тогда, для идеального газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT},$$

То есть, получаем систему

$$n-1 = \frac{PM}{RT}$$

$$n_1-1 = \frac{PM}{RT_1}$$

Откуда

$$T = T_1 \frac{n_1-1}{n-1} = 303 \frac{1.0002623-1}{1.0002392-1} = 332\text{K} = 59^\circ\text{C}.$$

Ответ: $T \approx 59^\circ\text{C}$.

Общие критерии для оценивания решений.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

- 1) Любое правильное решение оценивается в 10 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение участника отличается от авторского.
- 2) Недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений, если при этом не возникает неоднозначной трактовки написанного участником текста и/или формул.
- 3) Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Баллы	Критерии
10	Полное верное решение.
9	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
7-8	Решение в целом верное, но содержит арифметические ошибки, не влияющие в целом на ход решения. ЛИБО Не рассмотрены некоторые случаи. Решение может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
5-6	Решение не доведено до конца, но ведется в правильном направлении и выполнена его существенная часть. ЛИБО Допущены арифметические ошибки, оказавшие существенное влияние на ход решения.
3-4	Доказаны только вспомогательные утверждения, которые можно использовать в решении задачи. ЛИБО Допущены грубые ошибки (логические ошибки, неверное применение свойств, теорем и т.д.), оказавшие существенное влияние на ход решения. ЛИБО Выдвинута, но не доказана верная гипотеза, позволяющая дать ответ на задачу.
1-2	Рассмотрены только отдельные частные случаи, которые могут быть использованы для поиска полного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют. ЛИБО Записан только ответ без обоснований.
[графу оставить пустой]	Решение отсутствует, участник не приступал.