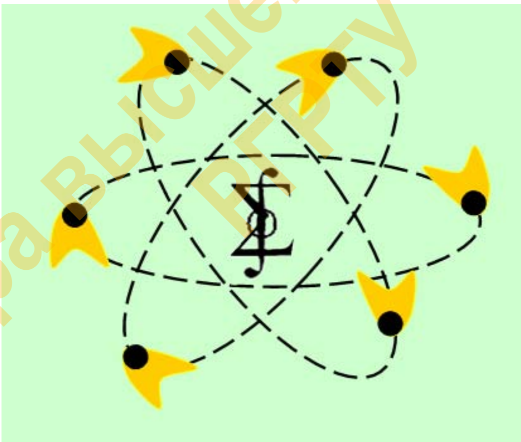
7628

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф.УТКИНА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Методические указания



Рязань 2023

УДК 519.21
Элементы теории случайных процессов: методические указания/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост.: Н.Н. Маслова, Л.С. Ревкова. Рязань, 2023. 36 с.

Содержат определение случайного процесса (СП), понятия реализации и сечения СП, одномерной и многомерных функций распределения СП, даны основы корреляционной теории СП, базирующейся на изучении моментов первого и второго порядков, а также рассмотрены такие понятия, как стационарность и эргодичность СП. Приведено большое количество примеров.

Предназначены для студентов направлений 11.03.01 и 11.03.02 и специальности 11.05.01.

Табл.5. Ил.9. Библиогр.: 5 назв.

Случайные процессы, реализация, сечение, математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция, стационарные и эргодические процессы

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой кандидат физ.-мат. наук К.В. Бухенский)

Введение

Широк и разнообразен круг задач, которые могут быть решены методами классической теории вероятностей. Однако все эти задачи носят статический характер в том смысле, что в их постановке и методах решения либо отсутствует, либо может быть исключено понятие времени. Для описания сигналов, которые отображают изменяющиеся со временем случайные явления, методов классической теории вероятностей недостаточно. Такие задачи изучает *теория случайных процессов*.

1. Понятие о случайной функции (процессе). Реализация и сечение случайного процесса

Случайная величина – одно из базовых понятий теории вероятностей.

Для сопоставления понятий случайной величины с понятием случайной функции для начала рассмотрим конкретные примеры случайных величин.

Пример 1. Уровень радиотехнического сигнала в данный момент времени есть величина случайная $X=\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$, где ω – один из возможных результатов (исходов) измерения уровня сигнала.

Пример 2. Ошибка радиодальномера в данный момент времени $\Delta=\Delta(\omega)$; $\omega\in\Omega$, при условии, что цель и радиодальномер неподвижны, здесь ω – один из возможных исходов измерения ошибки Δ.

Пример 3. Атмосферное давление в данной точке пространства и в данный момент времени $p=p(\omega)$, $\omega\in\Omega$, здесь ω – один из возможных исходов регистрации атмосферного давления.

Пример 4. Число вызовов на телефонной станции за фиксированный промежуток времени $[0;t]$, $\mu=\mu(\omega)$, $\omega\in\Omega$.

Ограничиваясь только случайными величинами, мы изучаем случайные явления в каких-то фиксированных постоянных условиях отдельного эксперимента. На практике же часто приходится иметь дело с такими случайными величинами, которые изменяются в процессе опыта, зависят не только от исхода ω эксперимента, но и от других аргументов или параметров.

Так, например:

– уровень сигнала в течение всего времени t передачи $X=\xi(\omega,t)$ зависит от исхода ω измерения сигнала и времени t;

– ошибка радиодальномера при непрерывно изменяющейся дальности до цели зависит от исхода ω измерения дальности и расстояния l до цели, $\Delta=\Delta(\omega,l)$;

– атмосферное давление p , регистрируемое в точке (x,y,z) пространства R^3, зависит от результата (исхода) ω измерения, времени t и координат (x, y, z) точки $p= p(\omega,t, x, y, z)$.

Рассмотренные примеры дают основание для введения следующего определения.

Определение. *Случайной функцией* называется случайная величина, зависящая от элементарного события $\omega\in\Omega$ и действительных аргументов t, x, y, z:

$$X=\xi(\omega, t, x, y, z).$$

Теория случайных функций сформировалась на базе теории вероятностей в связи с потребностями точного естествознания: физики, квантовой механики, биологии, теории связи, статистической радиотехники в начале XX века.

Может случиться, что случайная величина X будет зависеть от исхода $\omega\in\Omega$ эксперимента и лишь одного действительного аргумента.

Определение. *Случайным процессом* называется функция

$$X=\xi(\omega,t)$$

двух аргументов: элементарного события $\omega\in\Omega$ и одного действительного аргумента t.

В роли действительного аргумента t чаще всего выступает время. Поэтому случайный процесс в дальнейшем будем обозначать символом $X(t)$:

$$X(t)=\xi(\omega,t).$$

Для каждого фиксированного значения аргумента $t=t_0$ $\xi(\omega,t)=\xi(\omega,t_0)$ является функцией только одного переменного элементарного события

$$X(t_0)=\xi(\omega,t_0)$$

и представляет собой некоторую случайную величину, называемую *сечением* случайного процесса.

Определение. *Сечением* случайного процесса

$$X(t)=\xi(\omega,t)$$

называется случайная величина, являющаяся значением случайного процесса в фиксированный момент времени $t=t_0$:

$$X(t_0)=\xi(\omega,t_0).$$

Если момент времени t не фиксировать, то при изменении t мы будем получать все новые и новые сечения, т.е. будем иметь дело с переменным сечением случайного процесса. Будем обозначать это переменное сечение тем же символом $X(t)$, что и сам случайный процесс.

Будем обозначать это переменное сечение тем же символом $X(t)$, что и сам случайный процесс.

С только что указанной точки зрения на случайный процесс можно смотреть как на систему (конечную или бесконечную) случайных величин, получаемых в его сечении при различных значениях времени t.

Зафиксируем теперь значение аргумента $\omega\in\Omega$, т.е. остановимся на конкретном исходе $\omega=\omega_0$ определенного эксперимента. Тогда $X=\xi(\omega,t)$ окажется обычной неслучайной функцией времени t: $x_0(t)=\xi(\omega_0,t)$.

Последняя будет описывать течение процесса в данном конкретном опыте, который привел к исходу $\omega=\omega_0$ и называется *реализацией* процесса. Итак, имеем

Определение. *Реализацией* случайного процесса

$$X(t)=\xi(\omega,t)$$

называется неслучайная функция

$$x_0(t)=\xi(\omega_0,t)$$

времени t, которая является значением процесса при фиксированном значении аргумента $\omega=\omega_0$, т.е. функция, описывающая течение процесса в данном конкретном опыте, который привел к исходу $\omega=\omega_0$. Каждому исходу $\omega\in\Omega$ эксперимента будет соответствовать определенная реализация

$$x(t)=\xi(\omega,t)$$

случайного процесса. Поэтому на случайный процесс можно смотреть как на семейство $\{x(t)\}$ всех его реализаций $x(t)$, получаемых на исходах $\omega\in\Omega$ эксперимента (рис. 1).

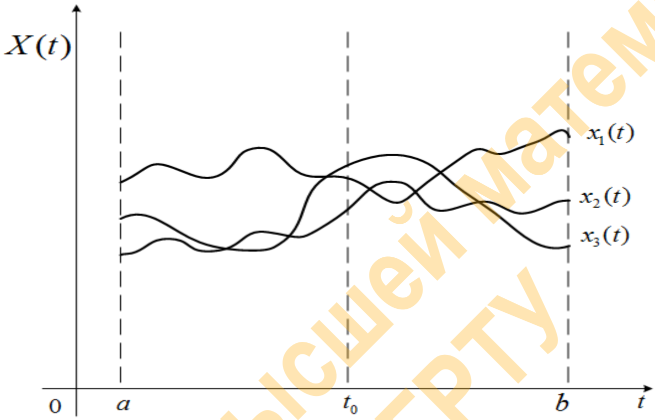


Рис. 1

Задача 1. Материальная точка остается на месте или движется равномерно вдоль прямой со скоростью υ. Скорость υ – величина случайная, заданная законом распределения (табл.1).

Таблица 1

$\upsilon=\omega$	0	0,5	1
p	0,2	0,3	0,5

За время t точка пройдет путь $S(t) = S_0 + \upsilon \cdot t$, где S_0 – расстояние точки от начала в момент $t = 0$. Очевидно, что $S(t)$ будет случайным процессом $S(t) = S(\omega, t)$.

Построить графики реализаций этого процесса и таблицу распределения сечения в моменты $t = 2$ и $t = 4$, считая, что $S_0 = 1$, т.е.$S(t) = \mathrm{X}(t) = 1 + \upsilon \cdot t$.

Решение. Так как в данном случае величина $\upsilon = \omega$ принимает всего 3 возможных значения, то возможны только 3 реализации (рис. 2):

$$\upsilon = 0 \to s_1(t) = S_0 + 0 \cdot t = 1 + 0 \cdot t = 1,$$
$$\upsilon = 0{,}5 \to s_2(t) = 0{,}5 \cdot t + 1,$$
$$\upsilon = 1 \to s_3(t) = t + 1.$$

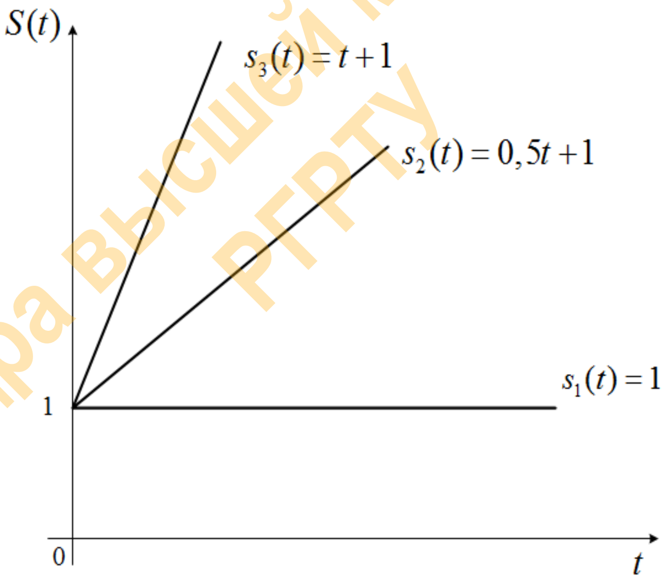


Рис. 2

Сечением данного процесса при $t = 2$ будет дискретная случайная величина $S(2) = 2\upsilon + 1$, где υ– случайная величина, принимающая значения согласно таблице 1.

Таблица 2

$S(2)$	1	2	3
p	0,2	0,3	0,5

Следовательно, в сечении $t = 2$ имеем случайную величину с законом распределения (табл.2),
где

$$S(2) = \begin{cases} 2 \cdot 0 + 1 = 1 \; \textit{с вероятностью} \; 0{,}2; \\ 2 \cdot 0{,}5 + 1 = 2 \; \textit{с вероятностью} \; 0{,}3\,; \\ 2 \cdot 1 + 1 = 3 \; \textit{с вероятностью} \; 0{,}5. \end{cases}$$

Аналогично найдем сечение процесса при $t = 4$ (табл.3).

Таблица 3

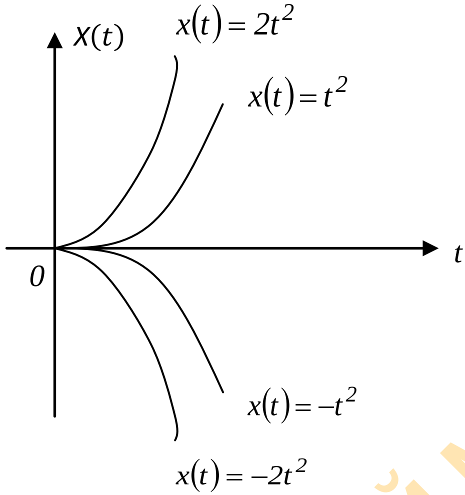
$S(4)$	1	3	5
p	0,2	0,3	0,5

Задача 2. Случайный процесс на промежутке [0;2] задан формулой $\mathrm{X}(t) = At^2$, где A– случайная величина, принимающая равновероятные значения -2, -1, 1, 2.

Построить графики реализаций и таблицу реализаций любого сечения и при$t = 1$.

Ответ:

$x(t)$	$-2t^2$	$-t^2$	t^2	$2t^2$
p	0,25	0,25	0,25	0,25
$x(1)$	-2	-1	1	2
p	0,25	0,25	0,25	0,25



2. Примеры случайных процессов, используемых в теории связи

Рассмотрим примеры случайных процессов, используемых в теории связи, их сечения и реализации.

Пример 1. Эксперимент E состоит в регистрации непрерывного радиотехнического сигнала в течение времени передачи $a \le t \le b$ (рис. 1). Величина сигнала – случайный процесс:

$$X=\xi(\omega,t).$$

Сечение $X(t_0)$ – величина сигнала в момент времени t_0. Это случайная величина с некоторым множеством ее возможных значений.

Реализация $x(t)$– это функция, описывающая закон изменения сигнала в течение времени $a \le t \le b$ в данной конкретной передаче.

Элементарное событие ω – появление в данном опыте конкретной реализации $x(t)$. Если описанный опыт E осуществить n раз, получим n реализаций: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$.

В итоге получим некоторый пучок реализаций (рис. 1), дающий представление о рассматриваемом случайном процессе.

Пример 2 **.**Случайный процесс *X(t)* (телеграфный сигнал) попеременно принимает значения +1 и -1. На рис. 3 представлена одна из реализаций телеграфного сигнала. Это ступенчатая функция *x(t)* со скачками σ=2, которые она испытывает в случайные моменты времени перемены ее знака.

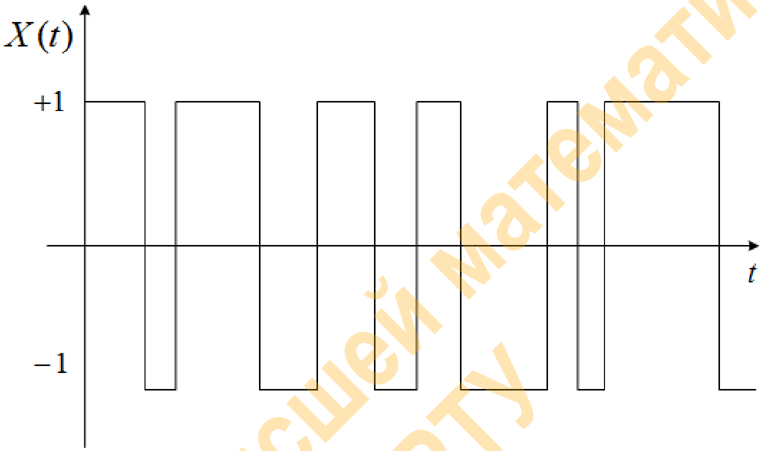


Рис. 3

Смена значений происходит в случайные моменты времени. Число μ перемен знака процесса за промежуток времени длины τ подчиняется закону Пуассона с параметром $a = \lambda\tau$:

$$\mathrm{P}(\mu = k) = \frac{(\lambda\tau)^k e^{-\lambda\tau}}{k!}, \ (k=0;1;2\ldots..).$$

Здесь λ – среднее число перемен знака сигнала за единицу времени.

Найдем закон распределения его сечения в произвольный момент *t* , если *x(0)* =+1.

Любое сечение процесса *X(t)* имеет два возможных значения +1 и -1. Значение +1 принимается в том случае, если за промежуток времени [*0;t*] произошло четное число 0,2,…,2*m*,… перемен знака; значение -1 – в противном случае.

Вероятность того, что к моменту *t* произойдет четное число перемен знака, равна

p(t)=P(X(t)=+1)=
$=\sum_{m=0}^{\infty} P(\mu = 2m) = \sum_{m=0}^{\infty}((\lambda t)2\mathrm{m})/(2\mathrm{m})!))e^{-\lambda t} =$
$=((\lambda t)^{2\mathrm{m}})/(2\mathrm{m})!))e^{-\lambda t}=$
$=e^{-\lambda t}\, ch(\lambda t) = e^{-\lambda t}(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t})/2=(1+e^{-2\lambda t})/2.$

Вероятность нечетного числа перемен знака
$q(t)=P(X(t)=-1)=1-p(t)=1-((1+e^{-2\lambda t})/2)=(1-e^{-2\lambda t})/2.$

Замечание. Можно заметить, что предел вероятностей $\lim p(t)$=0,5 и $\lim q(t)$=0,5 при $t \to \infty$.

Это означает, что при достаточно большом удалении сечения *X(t)* от начала координат *t*=0 события *X(t)*=-1 и *X(t)*=1 делаются как угодно близкими к равновозможным событиям, поэтому закон распределения любого сечения СП *X(t)* имеет вид табл. 4.

Таблица 4

X(t)	-1	1
p	0,5	0,5

Пример 3. Случайная гармоника
$$X(t) = U_m \cdot cos(\omega_0 t + \phi_0),$$
где амплитуда U_m, частота ω_0 и фазовый угол ϕ_0 могут быть случайными величинами. Например, случайный процесс $U(t)$ состоит из гармонических реализаций
$$u(t) = U_m \cdot cos(\omega_0 t + \phi),$$
где амплитуда U_m и частота ω_0 – постоянные параметры, а начальная фаза реализации ϕ – случайная величина, которая с одинаковой вероятностью принимает значение в интервале $(-\pi, \pi)$ (рис. 4).

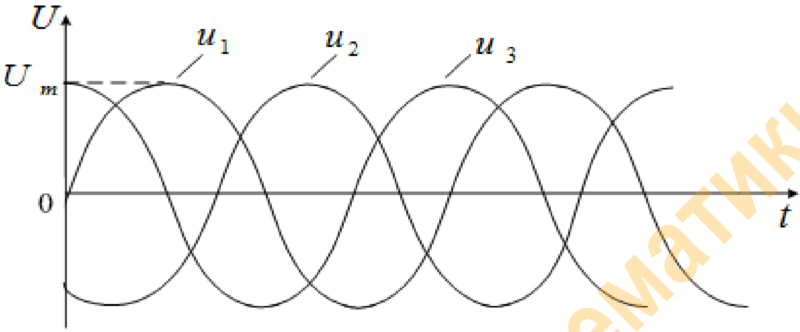


Рис. 4

3. Функция распределения и плотность распределения вероятностей случайного процесса

Рассмотрим случайный процесс $X=\xi(\omega,t)$.

При каждом фиксированном значении времени он представляет собой случайную величину $X(t)$, которую мы назвали сечением процесса в рассматриваемый момент времени. Функция распределения этого сечения $X(t)$:

$$F_1(x,t)=P(X(t)<x),\ x\in R,$$

кроме аргумента x, будет зависеть еще и от времени t, так как для разных моментов мы будем получать, вообще говоря, различные сечения $X(t)$ и соответствующие функции распределения.

Определение. Одномерной функцией распределения $F_1(x,t)$ случайного процесса $X(t)$ называется функция распределения сечения процесса в любой момент времени t:

$$F_1(x,t)=P(X(t)<x),\ x\in R.$$

Одномерная функция распределения не является исчерпывающей характеристикой случайного процесса. Действительно, она выражает закон распределения сечения $X(t)$ для данного, хотя и произвольного, момента времени. Однако она не отвечает на вопросы о зависимости случайных величин (сечений) $X(t_1)$,

$X(t_2)$, получаемых при различных значениях времени $t=t_1$ и $t=t_2$, $t_1 \neq t_2$.

В связи с этим можно рассматривать двумерную функцию распределения

$$F_2(x_1,x_2,t_1,t_2)=P(X(t_1)<x_1,\ X(t_2)<x_2),$$

где x_1, x_2 – любые действительные числа.

Теоретически число сечений можно безгранично увеличивать и рассматривать все более и более подробную характеристику случайного процесса.

Определение. n–мерной функцией распределения случайного процесса $X(t)$ называется функция распределения системы n любых его сечений $X(t_1)$, $X(t_2)$,..., $X(t_n)$:

$$F_n(x_1,x_2,\dots,x_n,t_1,t_2,\dots,t_n)=P(X(t_1)<x_1,X(t_2)<x_2,\dots,X(t_n)<x_n),$$

где $x_1,x_2,\dots,x_n$ – любые действительные числа и $t_1,t_2,\dots,t_n$ – любые моменты из области T изменения времени t.

Если все сечения случайного процесса $X(t)$ являются непрерывными случайными величинами, то можно рассматривать одномерную плотность распределения вероятностей каждого такого сечения:

$$p_1(x,t)=\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x}.$$

Она называется одномерной плотностью распределения вероятностей процесса $X(t)$.

Аналогично можно рассмотреть двумерную плотность распределения вероятностей двух любых сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$ процесса $X(t)$:

$$p_2(x_1,x_2,t_1,t_2)=\frac{\partial F_2(x_1,x_2,t_1,t_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}.$$

Очевидно, что в общем случае описывать случайный процесс с помощью функции распределения или плотности распределения вероятностей его сечений представляется громоздким, мало удобным. Вместе с тем существуют такие случайные процессы, для полного описания которых оказывается достаточным знание либо одномерного, либо двумерного закона распределения. Например, процессы с независимыми сечениями.

Определение. Процессом *с независимыми сечениями* называется процесс $X(t)$, любое конечное число сечений которого является взаимно независимыми случайными величинами.

По определению взаимно независимых случайных величин

$$P(X(t)<x_1, X(t_2)<x_{2,\ldots,}X(t_n)<x_n)=$$
$$=P(X(t)<x_1)\, P(X(t_2)<x_2) \ldots.\, P(X(t_n)<x_n)$$

или, что одно и то же,

$$F_n(x_1, x_{2,} \ldots, x_n, t_1, t_{2,} \ldots, t_{n)=}F_1(x_1,t_1)\, F_1(x_2,t_2)\ldots F_1(x_n,t_n).$$

Следовательно, n-мерная функция распределения случайного процесса с независимыми сечениями полностью определяется как произведение соответствующих значений одномерной функции распределения.

Таким образом, для полной вероятной характеристики процесса с независимыми сечениями достаточно знать лишь одномерный закон распределения его переменного сечения.

Замечание. Случайный процесс с независимыми сечениями часто называют *белым шумом*.

Задача 3. См. условие задачи 1. Найти одномерную функцию распределения этого процесса в момент времени $t = 2$ и $t = 4$.

Решение. При $t = 2$ (см. табл. 2):

$$F_1(x,t) = 0 \ \text{при} -\infty < x \leq 1,$$
$$F_1(x,t) = 0 + 0{,}2 = 0{,}2 \ \text{при}\ 1 < x \leq 2,$$
$$F_1(x,t) = 0 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5 \ \text{при}\ 2 < x \leq 3,$$
$$F_1(x,t) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1 \ \text{при}\ x > 3.$$

Окончательно $F_1(x,t) = \begin{cases} 0, x \leq 1, \\ 0{,}2, 1 < x \leq 2, \\ 0{,}5, 2 < x \leq 3, \\ 1, x > 3. \end{cases}$ (*рис.* 5).

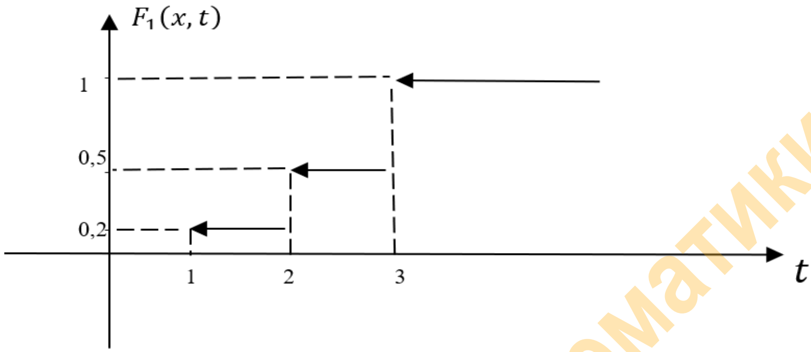


Рис. 5

Аналогично при $t = 4$ (см. табл. 3):

$$F_1(x,t) = \begin{cases} 0, x \leq 2, \\ 0{,}2, 1 < x \leq 3, \\ 0{,}5, 2 < x \leq 5, \\ 1, x > 5. \end{cases} (рис.\, 6).$$

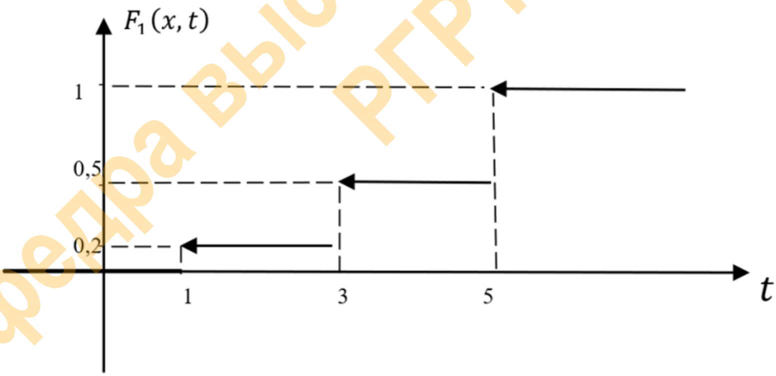


Рис. 6

Задача 4. См. условие задачи 2. Найти одномерную функцию распределения и плотность распределения этого процесса.

Решение. Найдем одномерную функцию распределения:

$$F_1(x,t) = P[x(t) < x] = P[At^2 < x] = P\left(A < \frac{x}{t^2}\right).$$

При этом $F_1(x,\ t) = \int_{-\infty}^{x/t^2} p_A\,(z)dz$. Если случайная величина A распределена по равномерному закону (рис. 7), то

$$p_A(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad \int_a^b p_A\,(x)dx = 1.$$

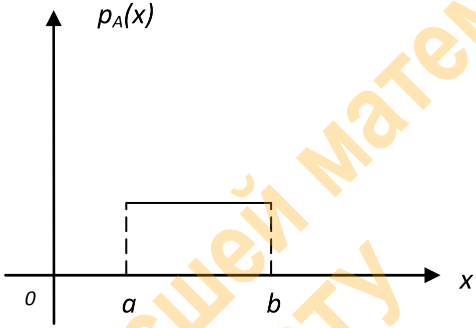


Рис.7

В данном случае $p_A(x) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$F_1(x,t) = \int_{-\infty}^{x/t^2} p_A\,(z)dz = \begin{cases} 0, & \dfrac{x}{t^2} \le 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x/t^2} dz = \dfrac{x}{2t^2}, & 0 \le \dfrac{x}{t^2} \le 2, \\ 1, & \dfrac{x}{t^2} > 2, \end{cases}$$

т.е. $F_1(x,\ t) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 0, \\ \frac{x}{2t^2} \ \ при \ \ 0 < x \le 2\mathrm{t}^2, \\ 1 \ \ при \ \ x > 2\mathrm{t}^2. \end{cases}$

4. Корреляционная теория случайных процессов

Мы уже убедились в том, что изучение случайных процессов с помощью всех его конечномерных законов распределения в общем случае представляет трудную, практически почти невыполнимую задачу ввиду громоздкости и сложности математического аппарата, его малой эффективности. К тому же исследователь, как правило, и не располагает знанием законов распределения сечений случайного процесса $X(t_1)$, $X(t_2)$, $X(t_3)$, $X(t_4)$, …, $X(t_n)$ для произвольного набора t_1, t_2, $t_3, \ldots, t_n$ моментов времени.

По этой причине при изучении случайных процессов чаще всего идут по другому пути, не требующему знания многомерных законов распределения. Чаще всего случайные процессы характеризуют с помощью параметров, подобных числовым характеристикам случайных величин.

Корреляционная теория случайных процессов все свои выводы о случайных процессах основывает на изучении моментов первого и второго порядков. Эта теория оказывается достаточной для решения многих задач практики, теории связи, статистической радиотехники.

Моменты случайных величин $m=M\xi$, $D=D\xi$ являются числами, и поэтому их называют числовыми характеристиками случайных величин.

В отличие от них моменты случайных процессов являются неслучайными функциями. В связи с этим их называют просто *характеристиками случайных процессов*.

Мы рассмотрим следующие характеристики случайных процессов:

– математическое ожидание $m_x(t)$ (начальный момент первого порядка);

– дисперсию $D_x(t)$ (центральный момент второго порядка);

корреляционные функции $K_x(t_1,t_2)$,$K_{xy}(t_1,t_2)$ (корреляционные моменты или смешанные моменты второго порядка).

4.1. Математическое ожидание

Рассмотрим случайный процесс $X(t)=\xi(\omega,t)$. В любой фиксированный момент времени t его сечение $X(t)$представляет собой обычную случайную величину, и мы можем ставить вопрос о вычислении ее математического ожидания $m_x(t)=M[X(t)]$.

При изменении времени t сечение $X(t)$ станет переменным и его математическое ожидание будет представлять собой некоторую уже неслучайную функцию времени t.

Определение. *Математическим ожиданием* случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $m_x(t)$, значение которой в каждый фиксированный момент времени t равно математическому ожиданию сечения $X(t)$процесса, соответствующего тому же моментуt:

$$m_x(t)=M[X(t)].$$

Для случайного процесса $X(t)$, сечение которого – дискретные случайные величины, с законом распределения

$X(t)$	x_1	x_2	…	x_n
$p_n(t)=P(X(t)=x_n)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	…	$p_n(t)$

математическое ожидание запишется в виде

$$m_x(t)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k(t).$$

Если же сечения случайного процесса $X(t)$ – случайные величины непрерывного типа с плотностью распределения вероятностей $p(x,t)$, то математическое ожидание процесса находится по формуле

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,t)dt.$$

Геометрически математическое ожидание $y=m_x(t)$ можно истолковать как некоторую “среднюю кривую”, около которой в некотором смысле группируются графики реализаций $\{x(t)\}$ случайного процесса.

Таким образом, математическое ожидание процесса выражает “среднюю тенденцию” изменения во времени реализаций этого процесса.

Задача 5. Найти математическое ожидание сечений СП $S(t)$ в условиях задачи 1 при $t = 2$, при $t = 4$ и в любой момент времени.

Решение. При $t = 2$ (см. табл. 2):

$M\big(X(2)\big) = m_x(2) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}5 = 2{,}3;$

при $t = 4$ (см. табл.3):

$$M\big(X(4)\big) = m_x(4) = 1 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}5 = 3{,}6.$$

В любой момент времени:

$M\big(X(t)\big) = M(1 + vt) = 1 + tM(v);$

$M(v) = 0 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}65;$

$M\big(X(t)\big) = 1 + 0{,}65t.$

Можно дать геометрическую интерпретацию понятия математического ожидания случайного процесса (рис. 8).

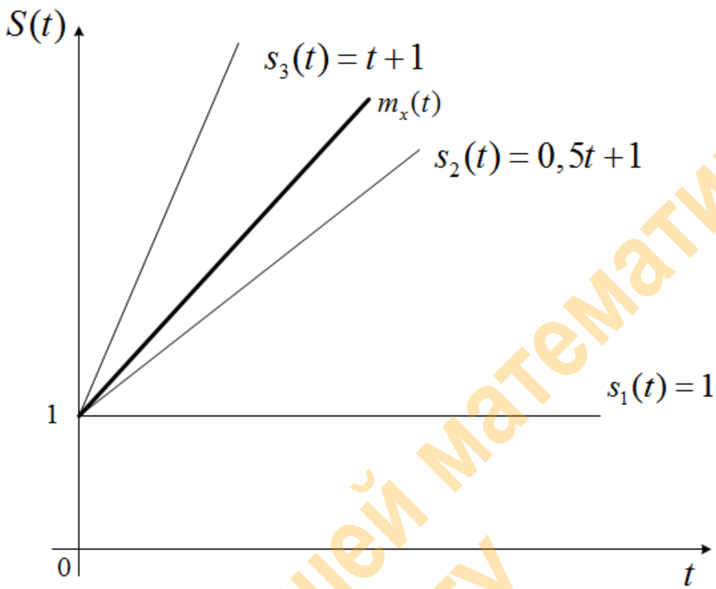


Рис. 8

Задача 6. Случайный процесс $U(t)$ образован реализацией вида

$$U(t) = U_m \cos(\omega t + \Phi),$$

где U_m и ω – известные неслучайные величины, Φ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-\pi, \pi]$ (рис. 4).

Найти математическое ожидание $m_u(t)$ этого СП.

Решение. $m_u(t) = \int_{-\pi}^{\pi} U_m \cos(\omega t + \phi) \frac{1}{2\pi} d\phi,$

так как одномерная плотность распределения вероятностей $p_1(x,t) = \frac{1}{2\pi} = p_\Phi(x)$ для случайной величины *Ф,* равномерно распределенной на промежутке $[-\pi, \pi]$.

$$m_u(t) = \frac{U_m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos(\omega t + \phi)\, d\phi = \frac{U_m}{2\pi}(sin(\omega t + \phi)_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{U_m}{2\pi}(sin(\omega t + \pi) - sin(\omega t - \pi)) = 0 = const.$$

Математическое ожидание $m_x(t)$ не может служить исчерпывающей характеристикой случайного процесса *X(t)*. Необходимо еще ввести меру разброса или рассеяния возможных реализаций $\{x(t)\}$ случайного процесса относительно его математического ожидания.

Определение. Разность $\overset{\circ}{X} = X(t) - m_x(t)$ называется центрированным случайным процессом или пульсацией процесса *X(t).*

4.2. Дисперсия

Определение. Дисперсией случайного процесса называется неслучайная функция $D_x(t)$, значение которой для каждого момента времени *t* равно математическому ожиданию квадрата пульсации СП:

$$D_x(t)=D[X(t)-M_x(t))^2]=M[\overset{\circ}{X}(t)].^2$$

Дисперсия случайного процесса для каждого момента времени *t* равна дисперсии соответствующего сечения случайного процесса.

Дисперсия для процесса *X(t)*, сечения которого принимают дискретные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\ldots, p_n(t)$, находится по формуле

$$D_x(t)=\Sigma_к[x_k-m_x(t)]^2p_k(t).$$

Дисперсия для процесса , сечения которого $X(t)$ являются непрерывными случайными величинами с плотностью распределения вероятностей $p(x,t)$, находится по формуле

$$D_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-m_x(t)]^2p(x,t)dx.$$

Для вычисления дисперсии процесса можно использовать формулу

$$D_x(t)=M[X(t)]^2-m_x^2(t).$$

Извлекая корень квадратный из дисперсии, получаем среднее квадратическое отклонение случайного процесса $X(t)$ от его математического ожидания $m_x(t)$:

$$\sigma_x(t)=\sqrt{D_x(t)}.$$

Задача 7. Найти дисперсию сечений СП $S(t)$ в условиях задачи 1 при $t=2$, при $t=4$ и в любой момент времени.

Решение. При $t=2$ (см. табл. 2)

$M[X(2)]^2 = 1\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}5 = 5{,}9;$

$D_x(2) = M[X(2)]^2 - m_x^2(2) = 5{,}9 - 2{,}3^2 = 5{,}9 - 5{,}29 = 0{,}61;$

при $t=4$ (см. табл.3):

$M[X(4)]^2 = 1\cdot 0{,}2 + 9\cdot 0{,}3 + 25\cdot 0{,}5 = 15{,}4;$

$D_x(4) = M[X(4)]^2 - m_x^2(4) = 15{,}4 - 3{,}6^2 = 15{,}4 - 12{,}96 =$
$= 2{,}44.$

В любой момент времени:

$D_x(t) = M[X(t)]^2 - m_x^2(t)$=$M(1+vt)^2 - (1+$
$+tMv)2=M1+2vt+v2t2-(1+tMv)2=1+2Mvt++M\upsilon 2t2$-1-
$2Mvt - M^2vt^2 = M\upsilon^2t^2$-$M^2vt^2 = (M\upsilon^2$-$M^2\upsilon)t^2.$

Учитывая, что $Mv = 0\cdot 0{,}2 + 0{,}5\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}5 = 0{,}65$, $Mv^2 = 0^2\cdot 0{,}2 + 0{,}5^2\cdot 0{,}3 + 1^2\cdot 0{,}5 = 0{,}575$, получаем:

$D_x(t) = M[X(t)]^2 - m_x^2(t) = (M\upsilon^2 - M^2\upsilon)t^2 = (0{,}575 - 0{,}65^2)t^2 =$
$= 0{,}1525t^2.$

4.3. Корреляционная функция, взаимная корреляционная функция случайного процесса, их вероятностный смысл

Математическое ожидание $m_x(t)$ и дисперсия $D_x(t)$ являются важными характеристиками случайного процесса, однако для описания основных особенностей случайного процесса этих характеристик оказывается недостаточно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим два случайных процесса $X_1(t)$ и $X_2(t)$, представленных семействами их реализаций $\{x_1(t)\}$и$\{x_2(t)\}$ (рис.9а, 9б).

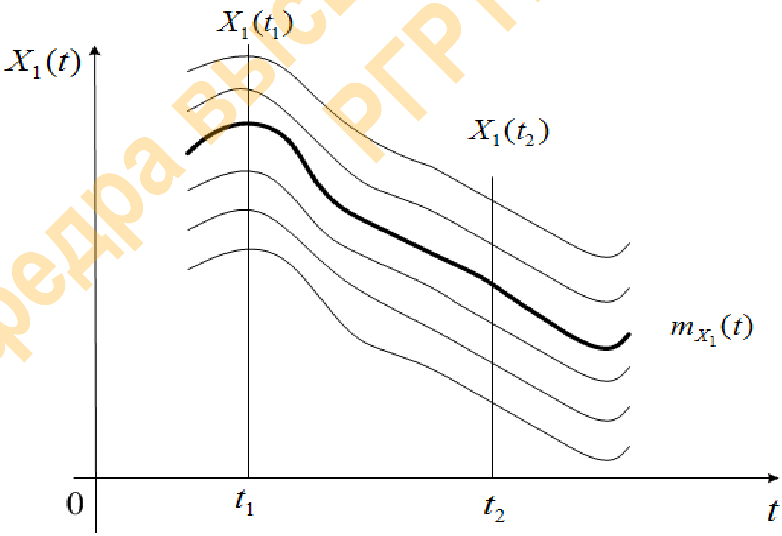


Рис.9а

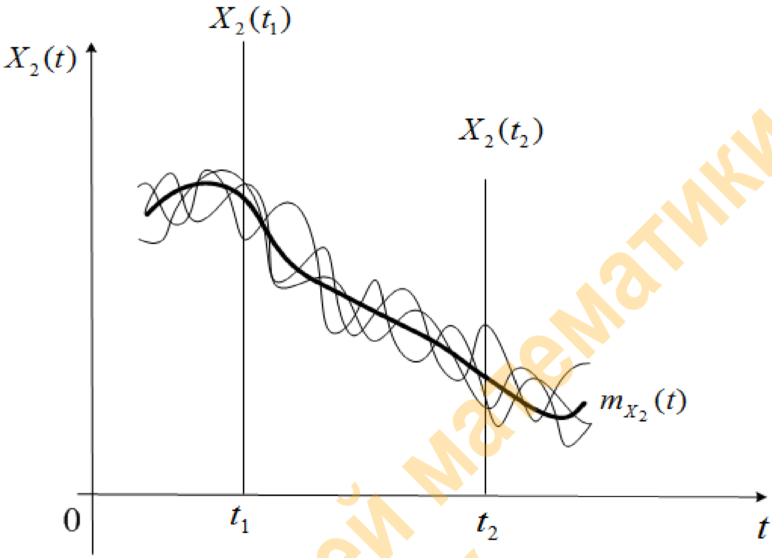


Рис.9б

Они имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии.

Однако характер их поведения различен. Для случайного процесса $X_1(t)$характерно плавное, постепенное изменение его реализаций $\{x_1(t)\}$ и сечений $X_1(t)$ с течением времени t.Здесь мы наблюдаем ярко выраженную зависимость между его сечениями $x_1(t_1)$ и $x_1(t_2)$, получаемыми в различные моменты t_1 и t_2.

Напротив, случайный процесс $X_2(t)$ имеет резко колебательный характер. Для него характерно быстрое затухание зависимости между его сечениями $x_2(t_1)$ и $x_2(t_2)$ по мере увеличения промежутка времени между моментами t_1 и t_2.

Мы видим что внутренняя структура рассматриваемых случайных процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$ совершенно различна, но это различие не улавливается ни математическим ожиданием, ни дисперсией. Для описания степени зависимости между сечениями $X(t_1)$и $X(t_2)$ случайного процесса $X(t)$ вводится специальная характеристика , называемая корреляционной (или автокорреляционной) функцией.

Рассмотрим случайный процесс $X(t)$. При значениях аргумента $t=t_1$ и $t=t_2$ получим два сечения $X(t_1)$ и $X(t_2)$процесса, т.е. систему двух случайных величин $X(t_1)$, $X(t_2)$с корреляционным моментом:

$$K_x(t_1,t_2) = M[(X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)].$$

Так как $M[(X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)] = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]$,

то $K_x(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]$.

Определение. Корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $K_x(t_1,t_2)$ двух аргументов t_1 и t_2, которая при каждой паре значений t_1,t_2 равна корреляционному моменту соответствующих сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$случайного процесса:

$$K_x(t_1,t_2) = M[(X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]$$

или $K_x(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)]$.

Принимая во внимание известную из теории вероятностей формулу для корреляционного момента, получаем

$$K_x(t_1,t_2)=M[(X(t_1)X(t_2)-m_x(t_1)\, m_x(t_2)].$$

Если сечения $X(t_1)$ и $X(t_2)$ как случайные величины независимы, то $K_x(t_1,t_2)=0$, а отсюда следует, что $X(t_1)$ и $X(t_2)$ – независимые случайные величины.

Следовательно, корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)$с вероятностной точки зрения выражает взаимную связь между двумя произвольными сечениями $X(t_1)$ и $X(t_2)$ случайного процесса $X(t)$.

В том случае, когда $t_1=t_2=t$,корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)$ обращается в дисперсию случайного процесса:

$$K_x(t,t)=M[(X(t)-m_x(t)]^2=M[\overset{\circ}{X}(t)]^2 =D_x(t).$$

Задача 8. Найти корреляционную функцию случайного процесса (см. условие задачи 1).

Решение. $K_x(t_1, t_2) = M[(X(t_2) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)] =$
$= M[(1 + \upsilon t_1 - 1 - 0{,}65t_1)(1 + \upsilon t_2 - 1 - 0{,}65t_2)] =$
$= M[(\upsilon t_1 - 0{,}65t_1)(\upsilon t_2 - 0{,}65t_2)] =$
$= M[\upsilon^2 t_1 t_2 - 2 \cdot 0{,}65t_1 t_2 + 0{,}65^2 t_1 t_2] =$
$= t_1 t_2[M\upsilon^2 - 1{,}3M\upsilon + 0{,}4225]$.

Учитывая, что $M\upsilon = 0{,}65$, $M\upsilon^2 = 0{,}575$, получаем

$$K_x(t_1, t_2) = (0{,}575 - 1{,}3 \cdot 0{,}65 + 0{,}4225)t_1 t_2 =$$
$$= 0{,}1525 t_1 t_2.$$

Для сечений СП при $t = 2$ и при $t = 4$

$$K_x(2{,}4) = 0{,}1525 \cdot 2 \cdot 4 = 1{,}22.$$

В том случае, когда $t_1=t_2=t$, корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ обращается в дисперсию случайного процесса:
$K_x(t, t) = M[(X(t) - m_x(t)]^2 = M[\overset{\circ}{X}(t)]^2 = D_x(t)$.

Действительно, $D_x(t) = K_x(t, t) = 0{,}1525t^2$. Этот результат совпадает с ранее полученным.

Функцию $K_x(t_1,t_2)$называют также автокорреляционной в том смысле, что она выражает связь между двумя произвольными сечениями одного и того же процесса *X(t)*. Ее называют еще и ковариационной функцией, так как по смыслу ковариации

$$cov(X(t_1),X(t_2))=K_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)].$$

Задача 9. Материальная точка движется равномерно вдоль прямой со скоростью υ. Скорость υ – величина случайная, равномерно распределенная в промежутке $(0; 2\pi)$. За время t точка пройдет путь $S(t) = S_0 + \upsilon t$. Известно, что $S_0 = 1$.

Найти: 1) одномерную функцию распределения данного процесса; 2) математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса.

*Решение:*1) $S(t) = 1 + \upsilon(t)$,

$$F_1(x,t) = P(S(t) < x) = P\big((1 - \upsilon t) < x\big) = P\left(\upsilon < \frac{x-1}{t}\right).$$

$$F_1(x,t) = \int_{-\infty}^{\frac{x-1}{t}} p_1\,(z)dz.$$

$p_1(\upsilon) = \frac{1}{2\pi - 0} = \frac{1}{2\pi}$, так как υ распределена равномерно. Тогда

$$F_1(x,t) = \int_{-\infty}^{\frac{x-1}{t}} \frac{dz}{2\pi} = \begin{cases} 0, & \frac{x-1}{t} \le 0, \\ \int_0^{\frac{x-1}{t}} \frac{dz}{2\pi}, & 0 < \frac{x-1}{t} \le 2, \\ 1, & \frac{x-1}{t} > 2 \end{cases}$$

или $F_1(x,t) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{2\pi t} \quad при \quad 1 < x \le 2t+1, \\ 1 \quad при \quad x > 2t+1; \end{cases}$

2) $m_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1\,(x,t)dx$, где $x = 1 + \upsilon t$, $\upsilon -$ случайная величина, распределенная в $[0; 2\pi]$, поэтому

$$p_1(x,t) = p_1(\upsilon) = \frac{1}{2\pi - 0} = \frac{1}{2\pi};$$

$$m_s(t) = \int_0^{2\pi} (1 + \upsilon t)\frac{1}{2\pi} d\upsilon = \frac{1}{2\pi}\left[\upsilon + \frac{\upsilon^2}{2} t\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi + \frac{4\pi^2}{2} t\right] = 1 + \pi t.$$

$$K_s(t_1,t_2) = M[(S(t_1) - m_s(t_1)][S(t_2) - m_s(t_2)] =$$

$$= M[(1 - \upsilon t_1 - 1 - \pi t_1] \times [1 + \upsilon t_2 - 1 - \pi t_2] =$$

$$= M[\upsilon t_1(1-\pi)\cdot \upsilon(t_2)(1-\pi)] = (1-\pi)M[\upsilon t_1 \upsilon t_2]$$
$$= (1-\pi)t_1 t_2 M\upsilon^2.$$

$$M\upsilon^2 = \int_0^{2\pi} x^2 \frac{1}{2\pi} dx = \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{2\pi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^2;$$

$$K_s(t_1 t_2) = \frac{4}{3}(1-\pi)\pi^2 t_1 t_2;$$

$$D_s(t) = K_s(t,t) = (1-\pi)\cdot\frac{4}{3}\pi^2\cdot t^2.$$

Замечание. Математическое ожидание в данном случае можно было определить проще:

$$S(t) = 1 + \upsilon t,$$
$$m_s(t) = M[S(t)] = M(1+\upsilon(t)] = 1 + tM\upsilon,$$
$$M\upsilon = \int_0^{2\pi} x\frac{1}{2\pi}dx = \frac{x^2}{2}\frac{1}{2\pi}\Big|_0^{2\pi} = \pi,$$
$$m_s(t) = 1 + \pi t.$$

Задача 10. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса $x(t) = Ae^{-\alpha t}$, где A– случайная величина с математическим ожиданием m и дисперсией D.

Решение. $m_x(t) = M[x(t)] = M[Ae^{-\alpha t}] = e^{-\alpha t}MA = me^{-\alpha t}$.

В данном случае $\overset{0}{X}(t) = Ae^{-\alpha t} - me^{-\alpha t} =$

$= (A-m)e^{-\alpha t} = \overset{0}{A}e^{-\alpha t}$.

Итак, $$K_\alpha(t_1,t_2) = M\left[\overset{0}{X}(t_1)\overset{0}{X}(t_2)\right] = M\left[\overset{0}{A}e^{-\alpha t_1}\overset{0}{A}e^{-\alpha t_2}\right] =$$

$= e^{-\alpha(t_1+t_2)}M\left(\overset{0}{A}\right)^2 = De^{-\alpha(t_1+t_2)}$. В данном случае

$$D_\alpha(t) = M[Ae^{-\alpha t} - me^{-\alpha t}]^2 = M[(A-m)^2e^{-2\alpha t}] =$$

$$= M\left(\overset{0}{A^2e^{-2\alpha t}}\right) = e^{-2\alpha t}M\left(\overset{0}{A}\right)^2 = De^{-2\alpha t},$$

так как $D = M\left(\overset{0}{X}(t)\right)^2 = M\left(\overset{0}{A}\right)^2$.

Иначе, зная $K_\alpha(t_1,t_2)$, можно сразу найти $D_\alpha(t)$:

$D_\alpha(t) = K_\alpha(t,t) = De^{-\alpha(t+t)} = De^{-2\alpha t}$.

Задача 11. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию телеграфного сигнала.

Решение. Закон распределения сечения телеграфного сигнала в любой момент времени (табл. 4):

$X(t)$	-1	1
p	0,5	0,5

Следовательно, $m_x(t)=(-1)0{,}5+1\cdot 0{,}5=0$.

Корреляционная функция телеграфного сигнала

$K_x(t_1,t_2)=M[(X(t_1)X(t_2)]-m_x(t_1)m_x(t_2)=M[(X(t_1)X(t_2)]$.

Чтобы ее вычислить, нужно найти закон распределения произведения $X(t_1)X(t_2)$ двух произвольных сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$ процесса. Оно имеет два возможных значения:

$$X(t_1)X(t_2)=+1,$$

если за время $|\tau|=|t_1-t_2|$ произошло четное число $\mu=2m$ перемен знака сигнала $X(t)$ и вероятность этого события

$$P_{2m}(/\tau/)=\sum_{m=0}^{\infty}((\lambda/\tau/)^{2m}/(2m)!)e^{-\lambda/\tau/}=e^{-\lambda/\tau/}ch(/\tau/)=$$

$$= e^{-\lambda/\tau/}((e^{\lambda/\tau/}+e^{-\lambda/\tau/})/2)=(1+e^{-2\lambda/\tau/})/2,$$

и $X(t_1)X(t_2)=-1$, если за время $|\tau|=|t_1-t_2|$ произошло нечетное число $\mu=2m+1$ перемен знака сигнала и вероятность этого события

$$P_{2m+1}(|\tau|)=1-P_{2m}(|\tau|)=1-(1+e^{2\lambda|\tau|})/2=(1-e^{-2\lambda|\tau|})/2.$$

По найденному закону распределения произведения двух произвольных сечений (табл.5):

Таблица 5

$X(t_1)X(t_2)$	-1	$+1$
p	$P_{2m+1}(\|\tau\|)=$ $=(1-e^{-2\lambda\|\tau\|})/2$	$P_{2m}(\|\tau\|)=$ $=(1+e^{-2\lambda\|\tau\|})/2$

находим корреляционную функцию телеграфного сигнала

$$K_x(t_1,t_2)=M[(X(t_1)X(t_2)]=(-1)P_{2m+1}(|\tau|)+(1)\,P_{2m}(|\tau|)=$$
$$=(-1)\,((1-e^{-2\lambda|\tau|})/2)+(+1)((1-e^{-2\lambda|\tau|})/2)=e^{-2\lambda|\tau|}.$$

Таким образом, взаимная связь между двумя произвольными сечениями $X(t_1)$ и $X(t_2)$ телеграфного сигнала зависит лишь от расстояния $|\tau|=|t_1-t_2|$ между сечениями и не зависит от положения самих сечений.

Полагая при $t_1=t_2=t$ $|\tau|=|t_1-t_2|=0$, получаем дисперсию телеграфного сигнала

$$D_x(t)=K_x(t,t)=e^{-2\lambda|\tau|}\big|_{\tau=0}=e^0=1.$$

Рассмотрим теперь два случайных процесса $X(t),Y(t),t\in T$, где T: $\alpha_0<t<\beta$ – общий промежуток времени, в котором они рассматриваются.

При фиксированных значениях $t=t_1\in T$ и $t=t_2\in T$ аргумента t получим два сечения $X(t_1)$ и $Y(t_2)$ или систему $X(t_1),Y(t_2)$ двух случайных величин с корреляционным моментом:

$$M[(X(t_1)-m_x(t_1))(\,Y(t_2)-m_y(t_2))]=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)].$$

Определение. Корреляционной функцией связи (или взаимной корреляционной функцией) двух случайных процессов *X(t)* ,*Y(t)* называется корреляционный момент двух произвольных сечений $X(t_1)$ и $Y(t_2)$ этих процессов:

$$K_{xy}(t_1,t_2)= M[(X(t_1)-m_x(t_1))(Y(t_2)-m_y(t_2))]=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)].$$

С вероятностной точки зрения она выражает меру зависимости между процессами *X(t)* и *Y(t)*.

Задача 12. Найти корреляционную функцию связи между процессами: $X(t) = \varphi(t)\cos\Phi$ и $Y = \psi(t)\sin\Phi$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$– неслучайные функции, Φ – случайная величина, распределенная равномерно на промежутке $[0; 2\pi]$.

Решение. $m_x(t) = M[\varphi(t)\cos\Phi] =$

$$= \varphi(t)M\cos\Phi = \varphi(t)\int_0^{2\pi}\cos\phi\frac{1}{2\pi}d\phi = \frac{\varphi(t)}{2\pi}\sin\phi|_0^{2\pi} = 0,$$

$m_x(t) = 0$, аналогично $m_y(t) = 0$.

$$K_{xy}(t_1,t_2) = M\left[\overset{0}{X}(t)\overset{0}{Y}(t)\right] = M[\varphi(t_1)\cos\Phi\cdot\psi(t_2)\sin\Phi) =$$

$$= \varphi(t_1)\Psi(t_2)M[\cos\Phi\sin\Phi] = \frac{1}{2}\varphi(t_1)\psi(t_2)M\sin 2\Phi =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(t_1)\Psi(t_2)\int_0^{2\pi}\sin 2\phi\frac{1}{2\pi}d\phi = 0.$$

Это означает, что процессы $X(t)$ и $Y(t)$некоррелированы.

5. Стационарные случайные процессы и их свойства

Случайный процесс, который протекает во времени приблизительно однородно и имеет вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого случайного значения, причем ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не испытывают существенных изменений в течение времени, принято называть стационарным процессом.

Говорят, что случайный процесс стационарен *в узком смысле*, если совокупность сечений этого процесса не изменяется при синхронном сдвиге сечений, т.е. любая его n-мерная плотность вероятности инвариантна относительно временного сдвига τ:

$$p(x_1,\ldots,x_n, t_1,\ldots,t_n) = p(x_1,\ldots,x_n, t_1+\tau,\ldots,t_n+\tau).$$

Определение. Случайный процесс $X(t)$ называется стационарным *в широком смысле*, если его математическое ожидание постоянно: $m_x(t) = m_x = const$, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_1 - t_2) = K_x(\tau).$$

*Замечания.*1. Дисперсия стационарного процесса постоянна и равна значению корреляционной функции в начале координат $D_x(t) = K_x(0) = const$.

2. Корреляционная функция $K_x(\tau)$ стационарного процесса является четной $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$.

3. Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле, но не наоборот.

Задача 13. Случайный процесс $U(t)$ образован реализацией вида

$$U(t) = U_m \cos(\omega t + \Phi),$$

где U_m и ω– известные неслучайные величины, Φ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-\pi, \pi]$ (рис.4). Выяснить, является ли данный процесс стационарным в широком смысле.

Решение. Найдем математическое ожидание $m_u(t)$ и корреляционную функцию $K_u(\Phi)$:

$m_u(t) = \int_{-\pi}^{\pi} U_m \cos(\omega t + \phi) \frac{1}{2\pi} d\phi$, так как одномерная плотность распределения вероятностей $p_1(x,t) = \frac{1}{2\pi} = p_\Phi(x)$ для случайной величины Φ, равномерно распределенной на промежутке $[-\pi, \pi]$.

$$m_u(t) = \frac{U_m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \phi)\, d\phi = \frac{U_m}{2\pi}(\sin(\omega t + \phi)_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{U_m}{2\pi}(\sin(\omega t + \pi) - \sin(\omega t - \pi)) = 0 = const.$$

$K_u(t_1, t_2) = M\big[(U(t_1) - m_u(t_1))(U(t_2) - m_u(t_2)\big] =$

$= M[U(t_1) \cdot U(t_2)] = M[U_m \cos(\omega t_1 + \Phi) \cdot U_m \cos(\omega t_2 + \Phi)] =$

$$= M\left[\frac{1}{2}U_m^2(\cos\omega\,(t_2 - t_1) + \cos(\omega(t_2 + t_1) + 2\Phi)\right] =$$

$$=\frac{1}{2}U_m^2\cos\omega\,(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}U_m^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega(t_2 + t_1) + 2\phi)\frac{1}{2\pi}d\phi =$$

$$=\frac{U_m^2}{2}\cos(t_2 - t_1) + \frac{1}{4}\frac{U_m^2}{2\pi}\sin(\omega\,(t_2 + t_1) + 2\phi|_{-\pi}^{\pi} = \frac{U_m^2}{2}\cos\omega\tau +$$

$$+\frac{U_m^2}{8\pi}[\sin(\omega(t_2 + t_1) + 2\pi) - \sin(\omega(t_2 + t_1) - 2\pi)] =$$

$$= \frac{U_m^2}{2}\cos\omega\tau,\ где\ \tau = t_2 - t_1.$$

Следовательно, процесс стационарный в широком смысле.

Задача 14. Случайный процесс $U(t)$ имеет реализацию $U(t) = U_m\cos(\omega t + \phi)$, где ω и ϕ –действительные числа, U_m – случайная величина с произвольным законом распределения. Выяснить, является ли данный процесс стационарным в широком смысле.

Решение.

$$M_u(t) = M[U_m\cos(\omega t + \phi)] = \cos(\omega t + \phi)\,MU_m,$$

U_m не зависит от t , т.е. $M_u(t)$ будет постоянным лишь при $MU_m = 0$.

Следовательно, процесс не будет стационарным.

6. Понятие об эргодических случайных процессах

Определение. Случайный процесс называется *эргодическим*, если любая его вероятностная характеристика, полученная усреднением по множеству возможных реализаций, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, равна временному среднему, полученному усреднением за достаточно большой промежуток времени $[0;\tau]$лишь одной реализации случайного процесса.

Случайный процесс $X(t)$ может быть эргодическим по отношению только к математическому ожиданию $m_x(t)$, дисперсии $D_x(t)$, корреляционной функции $K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau)$.

Справедлива теорема: «Если корреляционная функция стационарного процесса $X(t)$ стремится к нулю при$\tau \to \infty$,

$$\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0,$$

то случайный процесс $X(t)$ является эргодическим по отношению к математическому ожиданию».

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить реализации и найти сечение случайного процесса $X(t)$ в момент времени *t=1*, если $X(t) = \mathrm{At}^3$, где A – случайная величина $\frac{A}{p}\Big|\frac{-1}{0,4}\Big|\frac{0}{0,4}\Big|\frac{2}{0,2}$.

2. Построить реализации и найти сечение случайного процесса $X(t)$ в момент времени *t=2*, если $X(t) = \mathrm{2t\text{-}A}$,
где А – случайная величина $\frac{A}{p}\Big|\frac{-3}{0,5}\Big|\frac{0}{0,5}\Big|\frac{5}{0,3}$.

3. Построить реализации и найти сечение случайного процесса $X(t)$в момент времени *t=2*, если $X(t) = \mathrm{At}^2$,
где A – случайная величина $\frac{A}{p}\Big|\frac{-2}{0,3}\Big|\frac{0}{0,6}\Big|\frac{1}{0,1}$.

4. Построить реализации и найти сечение случайного процесса $X(t)$ в момент времени *t=π*, если $X(t) = \mathrm{Acost}$,
где А случайная величина $\frac{A}{p}\Big|\frac{-2}{0,2}\Big|\frac{0}{0,6}\Big|\frac{2}{0,2}$.

5. Построить реализации и найти сечение случайного процесса $X(t)$ в момент времени *t=1*, если $X(t) = \mathrm{At} + 1$,
где А – случайная величина $\frac{A}{p}\Big|\frac{-2}{0,3}\Big|\frac{0}{0,5}\Big|\frac{3}{0,2}$.

6. Для данного случайного процесса $X(t)$ найти
$m_x(t),\ K_x(t_1, t_2)$.
$X(t) = \mathrm{At}^2$, где А – случайная величина $\frac{A}{p}\Big|\frac{-2}{0,3}\Big|\frac{0}{0,6}\Big|\frac{1}{0,1}$.

7. Для данного случайного процесса $X(t)$ найти
$m_x(t),\ K_x(t_1, t_2)$.
$X(t) = \mathrm{Ae}^t$, где А – случайная величина $\frac{A}{p}\Big|\frac{0}{0,5}\Big|\frac{1}{0,4}\Big|\frac{2}{0,1}$.

8. Выяснить, является ли стационарным данный случайный процесс $X(t)$.
$X(t) = \mathrm{A}t^3$, где А – случайная величина $\frac{A}{p}\Big|\frac{-1}{0,4}\Big|\frac{0}{0,4}\Big|\frac{2}{0,2}$.

9. Выяснить, является ли стационарным данный случайный процесс $X(t)$.
$X(t) = \mathrm{A}\cos t$, где А – случайная величина $\frac{A}{p}\Big|\frac{-2}{0,2}\Big|\frac{0}{0,6}\Big|\frac{2}{0,2}$.

10. Для данного случайного процесса $X(t) = \mathrm{A}t + 1$ найти $K_x(t_1, t_2)$, если $D(A)=1$.

11. Для данного случайного процесса $X(t) = 2t\text{-}A$ найти $K_x(t_1, t_2)$, если $D(A)=0,5$.

12. Случайный процесс (СП) задан аналитически:
а) $X(t) = A\cos 2t$, $t_0=0$, *б)* $X(t)=A\sin\frac{t}{2}$, $t_0=\pi$,
в) $X(t)=A+t$, $t_0=3$, *г)* $X(t)=2+At$, $t_0=2$,
где A – случайная величина, заданная законом распределения

$A=\omega$	-1	0	2
p	0,3	0,5	0,2

1. Построить графики реализаций СП.
2. Найти сечение СП в момент времени t_0 и любой момент времени.
3. Найти корреляционную функцию и дисперсию.
4. Выяснить, является ли данный случайный процесс стационарным.

Библиографический список

1. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. - М.: Академия, 2003.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы.- М.: Высшая школа, 2005.
3. Нефедов В.И., Сигов А.С. Радиотехнические цепи и сигналы.- М.: Высшая школа, 2018.
4. Храмов А.Г. Теория случайных процессов. Конспект лекций: *Электронное учебное пособие*. – Самара: ФГБОУ «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)»,2011.

7. Маслова Н.Н., Щербакова А.А. Проблема опережающего обучения на примере темы «Случайные процессы» // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2023 [текст]: сб. тр. междунар. науч.-техн. форума: в 10 т. Т.10/ под общ. ред. О.В. Миловзорова. – Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2023.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Элементы теории случайных процессов

Составители: М а с л о в а Наталия Николаевна
Р е в к о в а Лариса Сергеевна

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 20.05.23. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2.25.
Тираж 30 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.