СТЕПЕНЬ С ДРОБНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Если показатель t степени числа a^t является дробным, т.е. $t = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, то для неотрицательных значений a $(a \geq 0)$ по определению полагают

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Для отрицательных чисел a $(a < 0)$ операция возведения в дробную степень не определена. В частности, это означает, что $\sqrt[3]{-8} = -2$, но выражение $(-8)^{\frac{1}{3}}$ не определено, тогда как для положительного числа $a = 8$: $\sqrt[3]{8} = 2$ и $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$.

В соответствии с определением степени с дробным показателем $0^t = 0$ для любого $t \in \mathbf{Q}^+$.

По определению полагают, что операция возведения в отрицательную дробную степень $\left(-\frac{m}{n}\right)$ определена только для положительных чисел a $(a > 0)$ и $a^{-\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

Например, $8^{-1/3} = \frac{1}{8^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$.

Операция $0^{-\frac{m}{n}}$ не определена.

Пример 3.5. Вычислите

$$243^{0,2} : \left(\frac{64}{27}\right)^{-1/3} + (0{,}8)^{-4}(-1{,}6)^3 + (21{,}3)^0 \cdot \sqrt[5]{1024}.$$

Решение. $243^{0,2} = 243^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243} = 3$;

$$\left(\frac{64}{27}\right)^{-1/3}=\left(\frac{27}{64}\right)^{1/3}=\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4};\quad (0{,}8)^{-4}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-4}=\left(\frac{5}{4}\right)^{4};$$

$$(-1{,}6)^3=-\left(\frac{8}{5}\right)^3;\quad (21{,}3)^0=1,\quad \sqrt[5]{1024}=4.$$

Подставляя полученные числовые значения и выражения со степенью в исходное числовое выражение, получаем

$$3:\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^4\left(-\left(\frac{8}{5}\right)^3\right)+4=3\cdot\frac{4}{3}+4-\left(\frac{5}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{8}{5}\right)^3=8-\frac{5^4}{5^3}\cdot\frac{8^3}{4^4}=$$

$$=8-5^{4-3}\cdot\frac{(4\cdot 2)^3}{4^4}=8-5\cdot 4^{3-4}\cdot 2^3=$$

$$=8-5\cdot 4^{-1}\cdot 8=8-5\cdot\frac{1}{4}\cdot 8=-2.$$

Ответ: -2.

Замечание. 1. *Значение дроби* $\frac{8^3}{4^4}$ *можно вычислить иначе:*

$$\frac{8^3}{4^4}=\frac{(2^3)^3}{(2^2)^4}=\frac{2^9}{2^8}=2^{9-8}=2.$$

2. *Легко заметить, что в выражении* $(0{,}8)^{-4}\cdot(0{,}16)^3$ *можно заменить* $1{,}6=2\cdot 0{,}8$*, тогда*

$$(0{,}8)^{-4}(0{,}16)^3=(0{,}8)^{-4}(2\cdot 0{,}8)^3=(0{,}8)^{-4}\cdot 2^3\cdot 0{,}8^3=8\cdot(0{,}8)^{-4+3}=$$

$$=8\cdot(0{,}8)^{-1}=8\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}=8\cdot\frac{5}{4}=10.$$

Пример 3.6. Найдите множество значений величины a, для каждого из которых определено выражение

$$\left(a^2-3a+2\right)^{-2/3}\cdot\sqrt{3a-a^2}+\sqrt[5]{\frac{2a-3}{5a-4}}.$$

Решение. С учетом определения степени с дробным показателем выражение $\left(a^2-3a+2\right)^{-2/3}$ имеет смысл только при

$$\left(a^2-3a+2\right)>0 \Leftrightarrow (a-1)(a-2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<1, \\ a>2. \end{array}\right.$$

Корень квадратный $\sqrt{3a-a^2}$ определён для неотрицательных значений подкоренного выражения, т.е.

$$3a-a^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(a-3) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq a \leq 3 .$$

Корень нечетной степени $\sqrt[5]{\dfrac{2a-3}{5a-4}}$ определён для всех значений a , кроме $a=\dfrac{4}{5}$. В итоге имеем (рис.3.1).

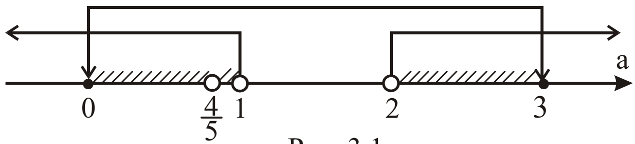

Рис. 3.1

Ответ: $a \in \left[0;\dfrac{4}{5}\right) \cup \left(\dfrac{4}{5};1\right) \cup (2;3]$.

Степень с иррациональным показателем

Невозможно определить степень положительного числа a $(a>0)$ с иррациональным показателем β $(\beta \in \mathbf{I})$ в виде конечной формулы, содержащей радикалы (корни) и степени, как это имело место для рациональных показателей степени. Обусловлено это невозможностью представления иррационального числа в виде обыкновенной дроби.

Для определения степени $a^{\beta}, a \in \mathbf{R}^{+}, \ \beta \in \mathbf{I}$, используют оценку этого числа снизу и сверху степенями с рациональными показателями того же числа a .

Определение 3. Степенью a^{β} положительного числа a с иррациональным показателем β называют такое действительное число, которое обозначается a^{β} и удовлетворяет следующим условиям:

а) если $a > 1$, то для любых рациональных чисел b_1, b_2 таких, что $b_1 < \beta < b_2$, выполняется неравенство $a^{b_1} < a^{\beta} < a^{b_2}$;

б) если $0 < a < 1$, то для любых $b_1, b_2 \in \mathbf{Q}$ и удовлетворяющих условию $b_1 < \beta < b_2$, выполняется неравенство

$$a^{b_2} < a^{\beta} < a^{b_1}.$$

В курсе математического анализа доказывается, что такое число a^{β} существует и что оно единственное для каждой пары чисел $a \in \mathbf{R}_+$ и $\beta \in \mathbf{I}$.

Так, например, 2^{π} – это такое действительное число, которое удовлетворяет каждому из неравенств

$$2^{3,14} < 2^{\pi} < 2^{3,15};$$

$$2^{3,141} < 2^{\pi} < 2^{3,142};$$

$$2^{3,1415} < 2^{\pi} < 2^{3,1416};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2^{3,14159265} < 2^{\pi} < 2^{3,14159266};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

В этой бесконечной цепочке двойных неравенств в качестве рациональных чисел b_1 и b_2 выступают оценки иррационального числа π, взятые соответственно с недостатком (число b_1) и с избытком (число b_2).

Определение степени с рациональным показателем (п.6.3) и с иррациональным показателем (п.6.4) при положительном основании a позволяет говорить о степени действительного числа a $(a > 0)$ с действительным показателем x, т.е. a^{x}.

Пусть $a > 0$, $b > 0$ и x, y – произвольные действительные числа. Тогда справедливы следующие свойства степеней с действительными показателями:

1. $\mathbf{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}$.

2. $\mathbf{a^x : a^y = a^{x-y}}$.

3. $\mathbf{\left(a^x\right)^y = \left(a^y\right)^x = a^{xy}}$.

4. $\mathbf{a^x \cdot b^x = \left(ab\right)^x}$.

5. $\mathbf{\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x}$.

6. $\mathbf{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^x}$.

Приведённые свойства лежат в основе методов решения многих примеров на вычисление значений числовых выражений и упрощение выражений с переменными. Очень важную роль эти свойства играют при решении показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Пример 3.7. Упростите выражение

$$\frac{\left(\sqrt[3]{a^{5/4}b^{2/3}}\right)^4 \cdot \left(\sqrt[4]{a\sqrt{a^3}}\right)^2}{\left(\sqrt[5]{a^{3/2}b^4}\right)^{2/3} \cdot \left(\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b}}\right)^5 \cdot \sqrt[5]{\sqrt[4]{a}}}.$$

Решение. Обозначим дробь буквой A. Допустимые значения переменных: $a > 0$ и $b > 0$. Используя свойства степеней с дробными и целыми показателями $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, $\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^{k/\ell} = a^{\frac{n \cdot k}{m \cdot \ell}}$ и др., получаем

$$A = \frac{a^{\frac{5\cdot 4}{4\cdot 3}} b^{\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}} a^{\left(1+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{2}{4}}}{a^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3\cdot 5}} \cdot b^{\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{1\cdot 5}{3\cdot 3}} \cdot a^{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{5}{3}+\frac{5}{4}} \cdot b^{\frac{8}{9}}}{a^{\frac{1}{5}+\frac{5}{3}+\frac{1}{20}} \cdot b^{\frac{8}{15}+\frac{5}{9}}} =$$

$$= a^{\frac{5}{3}+\frac{5}{4}-\frac{1}{5}-\frac{5}{3}-\frac{1}{20}} \cdot b^{\frac{8}{9}-\frac{8}{15}-\frac{5}{9}} = a \cdot b^{-\frac{1}{5}} = \frac{a}{\sqrt[5]{b}}.$$

Ответ: $\dfrac{a}{\sqrt[5]{b}}$.

Пример 3.8. Упростите числовое выражение

$$A=\sqrt{19-10\sqrt{3}-\sqrt{16-8\sqrt{3}}}+\sqrt{19+14\sqrt{3}-\sqrt{16-8\sqrt{3}}}.$$

Решение.

$$\sqrt{16-8\sqrt{3}}=2\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2\sqrt{\left(3-1\right)^2}=2\left|\sqrt{3}-1\right|=2\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Используя этот результат, получаем

$$A=\sqrt{19-10\sqrt{3}-2\left(\sqrt{3}-1\right)}+\sqrt{19+14\sqrt{3}-2\left(\sqrt{3}-1\right)}=$$

$$=\sqrt{21-12\sqrt{3}}+\sqrt{21+12\sqrt{3}}.$$

Поскольку $A>0$, то, возводя равенство в квадрат, получаем

$$A^2=21-12\sqrt{3}+2\sqrt{21^2-\left(12\sqrt{3}\right)^2}+21+12\sqrt{3}=$$

$$=42+2\cdot 3\sqrt{7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=48,$$

откуда $A=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

Альтернативный способ упрощения числового выражения $A=\sqrt{21-12\sqrt{3}}+\sqrt{21+12\sqrt{3}}$ основан на выделении полных квадратов в составе подкоренных выражений. Если они являются квадратами некоторых числовых выражений, то должны выполняться равенства $a^2+b^2=21$ и $2ab=12\sqrt{3}$ или $ab=6\sqrt{3}$. Рассмотрим возможные варианты представления числа $6\sqrt{3}$ в виде произведения двух чисел:

$$1\cdot 6\sqrt{3}=6\cdot\sqrt{3}=2\cdot 3\sqrt{3}=3\cdot 2\sqrt{3}.$$

Первые три пары: $a=1$, $b=6\sqrt{3}$; $a=6$, $b=\sqrt{3}$ и $a=2$, $b=3\sqrt{3}$ не подходят, поскольку в этом случае $a^2+b^2\neq 21$. Четвёртая пара $a=3$, $b=2\sqrt{3}$ подходит, так как $a^2+b^2 9+12=21$. В итоге

$$A=\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(3+2\sqrt{3}\right)^2}=\left|3-2\sqrt{3}\right|+\left|3+2\sqrt{3}\right|,$$

но $\left|3+2\sqrt{3}\right|=3+2\sqrt{3}$, а $3-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}-3$, поскольку $3<3\sqrt{3}$. Окончательно имеем $A=2\sqrt{3}-3+3+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Литература

1. Элементарная математика: теория чисел, основы комбинаторики, неравенства: учеб. пособие / А.И. Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2010. – 184 с.