МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.А. НЕЛЮХИН,
А.И. СЮСЮКАЛОВ,
Е.А. СЮСЮКАЛОВА

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА: ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рязань 2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет

С.А. НЕЛЮХИН,
А.И. СЮСЮКАЛОВ,
Е.А. СЮСЮКАЛОВА

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА: ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Учебное пособие

Рязань 2019

УДК 519.1

Элементы функционального анализа: линейные операторы, уравнения в банаховых пространствах: учеб. пособие / С.А. Нелюхин, А.И. Сюсюкалов, Е.А. Сюсюкалова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2019. - 84 с.

Содержит теоретические сведения о линейных операторах и функционалах, уравнениях с компактными операторами в банаховых пространствах, спектральной теории линейных операторов. Разобраны типичные примеры по решению практических задач по перечисленным темам. Приведены задачи для самостоятельного изучения и закрепления материала.

Предназначено студентам, обучающимся по направлениям подготовки 010400 “Прикладная математика и информатика”, 02.03.01 “Математика и компьютерные науки”, 02.03.03 “Математическое обеспечение и администрирование информационных систем”.

Библиогр.: 12 назв.

Линейные операторы, линейные функционалы, норма линейного оператора, обратный линейный оператор, уравнение 2-го рода Фредгольма с компактным оператором, спектр линейного оператора, собственные функции линейного оператора

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (канд. физ.-мат. наук, доц. М.И. Купцов)

Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов направлений подготовки “Математическое обеспечение и администрирование информационных систем”, “Прикладная математика и информатика”, “Математика и компьютерные науки” и является непосредственным продолжением пособия [12]. При изложении материала авторы постарались сохранить стиль и обозначения пособия [12].

В учебных планах нового поколения предусмотрено увеличение числа часов на самостоятельную работу студентов при одновременном сокращении числа аудиторных часов. В этих условиях возрастает роль учебных пособий, которые помогли бы студенту самостоятельно разобраться в некоторых разделах курса. В данном пособии изложен базовый теоретический материал по пяти темам (разделам) функционального анализа: “Линейные операторы. Обратные операторы”, “Линейные функционалы. Сопряженные пространства и сопряженные операторы”, “Вполне непрерывные операторы”, “Уравнения в банаховых пространствах”, “Спектральная теория линейных операторов”. Приведены доказательства основных утверждений, некоторые утверждения предложено доказать студентам в качестве упражнений. Приведены решения практических задач и упражнений технического характера. В конце каждого параграфа даны задачи для самостоятельного решения, ответы и указания к ним.

Материал данного пособия является классикой, поэтому не представляет научной и методической новизны, но помогает студенту систематизировать базовые структуры функционального анализа по перечисленным темам.

1. Линейные операторы. Обратные операторы

1.1. Линейные операторы. Непрерывные и ограниченные линейные операторы. Норма оператора

Одним из важнейших и наиболее хорошо изученных классов операторов является класс линейных операторов, определенных в линейных пространствах.

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства (ЛНП), $F: X \to X$ – отображение или *оператор*, определенный в окрестности точки $x_0 \in X$.

Определение 1.1. Оператор F называется *непрерывным в точке* x_0, если $F(x) \to F(x_0)$, при $x \to x_0$.

Пусть F – оператор с *областью определения* $D(F) \subset X$ и с *областью значений* $R(F) \subset Y$.

Определение 1.2. Оператор F называется *ограниченным*, если переводит любое ограниченное множество из $D(F)$ в множество, ограниченное в пространстве Y .

Пусть X, Y – ЛНП, оба вещественные или оба комплексные.

Определение 1.3. Множество $D \subset X$ называется *линейным многообразием*, если для любых $x_1, x_2 \in D$ и любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C})$ $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in D$.

Определение 1.4. Оператор $A: X \to Y$ с областью определения $D(A) \subset X$ называется *линейным*, если $D(A)$ – линейное многообразие в X и для любых $x_1, x_2 \in D(A)$ и любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C})$ выполняется равенство $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$.

Определение 1.5. Множество $N(A) = \{x \in D(A) : A(x) = 0\}$ называется *ядром* оператора A.

Определение 1.6. Линейный оператор $A: X \to Y$ с $D(A) = X$ называется *непрерывным*, если он непрерывен в точке $0 \in X$.

Теорема 1.1. Линейный оператор $A: X \to Y$, заданный на всем X и непрерывный в точке $0 \in X$, непрерывен в любой точке $x_0 \in X$.

Определение 1.7. Линейный оператор $A: X \to Y$ с $D(A) = X$ называется *ограниченным*, если существует $c \in \mathbf{R}, c > 0$ такое, что для любого $x \in \overline{U_1}(0)$, где $\overline{U_1}(0)$ – замкнутый шар с центром в точке $0 \in X$ и радиусом $r = 1$, справедливо неравенство $\|Ax\| \le c$.

Теорема 1.2. Линейный оператор $A: X \to Y$ с $D(A) = X$ ограничен тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|Ax\| \le c\|x\|$.

Теорема 1.3. Линейный оператор $A: X \to Y$ с $D(A) = X$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

Определение 1.8. *Нормой* ограниченного линейного оператора $A: X \to Y$ с $D(A) = X$ называется число $\|Ax\| = \sup\limits_{x \in X,\, \|x\| \le 1} \|Ax\|$.

Теорема 1.4. (О норме линейного оператора).

Для всякого ограниченного оператора A имеет место равенство

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Пример 1.1. Нулевой оператор θ; этот оператор ставит в соответствие каждому элементу $x \in X$ элемент $0 \in Y, 0x = 0$.

Пример 1.2. Тождественный оператор $I: X \to X$; этот оператор ставит в соответствие каждому $x \in X$ сам x: $Ix = x$.

Пример 1.3. В линейном пространстве $\mathbf{R}^n$ n-мерных столбцов $x = (x_i)_1^n, y = (y_i)_1^n, \ldots$ равенство $y = \mathrm{A}x$, где $\mathrm{A} = (a_{ij}),\ i, j = 1, \ldots, n$ – квадратная матрица порядка n, понимаемое как матричное равенство (матрица-столбец y равна произведению матрицы A на матрицу-столбец x), задает некоторый оператор A. В курсе линейной алгебры доказывается, что этот оператор линейный. При доказательстве используются свойства матриц.

Пример 1.4. Оператор умножения на независимую переменную: $(Ax)(t) = tx(t)$, $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$.

Это всюду определенный оператор, однако $R(A) \neq C[-1,1]$.

Пример 1.5. Линейные интегральные операторы Фредгольма:

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds,\ A: C[a,b] \to C[a,b]$$

и Вольтерра

$$(Ax)(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)ds,\ A: C[a,b] \to C[a,b];$$

функция $K(\cdot,\cdot)$, называемая *ядром*, непрерывная по совокупности переменных в квадрате $[a,b]^2$.

Пример 1.6. Оператор дифференцирования $Ax = \dfrac{dx}{dt}$, рассматриваемый как оператор, действующий в $C[a,b]$, т.е. $A: C[a,b] \to C[a,b]$, где $D(A)$ множество непрерывно дифференцируемых функций.

Оператор A на $C[a,b]$ не является ограниченным. В самом деле, пусть $x_n(t) = \sin nt$ на $[-\pi,\pi]$. Тогда $\|x_n\| = \max\limits_{-\pi \le t \le \pi} |\sin nt| = 1$,

а $\|Ax_n\| = \max\limits_{-\pi \le t \le \pi} \left|\dfrac{d}{dt}\sin nt\right| = n \cdot \max\limits_{-\pi \le t \le \pi} |\cos nt| = n$, поэтому $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = +\infty$.

Отметим также, что $R(A) = C[a,b]$, так как уравнение $x' = y$ имеет решение $x(t) = \int\limits_a^t y(s)ds$ при любой $y \in C[a,b]$.

Если рассматривать оператор $Ax = \dfrac{dx}{dt}$ действующим из $C^{(1)}[a,b]$ в $C[a,b]$, то он будет ограниченным и имеет место оценка его нормы:

$$\|Ax\|_C = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| \le \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| = \|x\|_{C^{(1)}} \quad \Rightarrow \|A\| \le 1.$$

Пример 1.7. Образ ограниченного линейного оператора может не быть замкнутым. Рассмотрим линейный оператор

$$A: C[a,b] \to C[a,b],\ (Ax)(t) = x(a) + \int_a^t x(s)ds.$$

Он является ограниченным, так как $\|Ax\| = \max\limits_{t\in[a,b]} \left| x(a) + \int\limits_a^t x(s)ds \right| \le (b-a+1)\|x\|$, однако переводит все пространство $C[a,b]$ в множество $R(A)$ непрерывно дифференцируемых функций, которое не является замкнутым в $C[a,b]$. Покажем это на следующем примере: функции $x_n(t)=\sqrt{t^2+\frac{1}{n}}$ при всех $(n\in\mathbf{N})$ непрерывно дифференцируемы на $[-1,1]$. Так как

$$\sqrt{t^2+\frac{1}{n}}-|t|=\frac{1}{n\sqrt{t^2+\frac{1}{n}}+|t|}\le\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0,$$

то $x_n(t)$ равномерно сходится к $x(t)=|t|$. Значит, $x(t)$ – предельная точка множества непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ функций, при этом сама не является таковой.

Теперь приведем примеры на вычисление норм операторов.

Пример 1.8. Пусть оператор $A:\mathbf{R}_1^n\to\mathbf{R}_1^n$ задан в некотором базисе матрицей $\mathrm{A}=(a_{ik})_{i,k=1}^{n}$. Обозначим $y_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k$. Оценим норму оператора сверху с помощью неравенства $\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$. Доказав неравенство типа $\|Ax\|\le C\|x\|$ с каким-нибудь C, будем иметь оценку $\|A\|\le C$.

$$\|Ax\|=\sum_{i=1}^{n}|y_i|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||x_k|=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}|x_k|\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|\le\max_{1\le k\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|\cdot\|x\|.$$

Следовательно, оператор A ограничен (а значит, и непрерывен) и для нормы имеет место оценка $\|A\|\le\max_{1\le k\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|=\alpha$.

Чтобы доказать противоположное неравенство, воспользуемся теоремой 1.4. Пусть k_0 – номер столбца, на котором достигается максимум в правой части последнего неравенства. Положим $\hat{x}=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$ (1 на месте с номером k_0, T – знак транспонирования). Очевидно, $\|\hat{x}\|=1$. Согласно теореме 1.4

$$\|A\|=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|\ge\|A\hat{x}\|=\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ik_0}\right|=\alpha,\quad\|A\|\ge\alpha.$$

Вместе с ранее доказанным неравенством, это означает, что

$$\|A\|=\alpha=\max_{1\le k\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|.$$

Пример 1.9. а) Рассмотрим линейный интегральный оператор Фредгольма в пространстве $C[a,b]$:

$$\|Ax\| = \max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b K(t,s)\,x(s)ds\right| \le \max_{t\in[a,b]}\int_a^b |K(t,s)||x(s)|\,ds \le$$

$$\le \|x\|\cdot\max_{t\in[a,b]}\int_a^b |K(t,s)|\,ds \Rightarrow \|A\| \le \max_{t\in[a,b]}\int_a^b |K(t,s)|\,ds = M .$$

Так как ядро $K(\cdot,\cdot)$ непрерывно, то непрерывен и интеграл $\int_a^b |K(t,s)|ds$, поэтому найдется $t_0 \in [a,b]$ такое, что $M = \int_a^b |K(t_0,s)|ds$. Можно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\hat{x} \in C[a,b], \|\hat{x}\| = 1$ такой, что

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| \ge \|A\hat{x}\| \ge |(A\hat{x})(t_0)| \ge M - \varepsilon .$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует: $\|A\| \ge M$ и, значит,

$$\|A\| = M = \max_{t\in[a,b]}\int_a^b |K(t,s)|\,ds .$$

б) Оценим норму оператора A как оператора в $CL_2[a,b]$, где:

$$CL_2[a,b] = \left\{ x(t) \in C[a,b]; \|x\|_{L_2} = \left[\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}.$$

Применяя неравенство Коши - Буняковского, получаем

$$\|Ax\|_{L_2}^2 = \int_a^b |(Ax)(t)|^2 dt = \int_a^b \left[\int_a^b K(t,s)\,x(s)ds\right]^2 dt \le$$

$$\le \int_a^b \left(\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\right)\cdot\left(\int_a^b |x(s)|^2\,ds\right)dt = \int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,dsdt\cdot\|x\|_{L_2}^2 .$$

Таким образом, $\|A\| \le \sqrt{\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,dsdt}$.

Пример 1.10. Равенство $y = \mathrm{A}x$, где $y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j,\ i = 1,2,...,$ и $x = (x_1, x_2, ...)^T$, $y = (y_1, y_2, ...)^T$ – столбцы и $\mathrm{A} = (a_{ij})$ – матрица бесконечного порядка, при некоторых ограничениях, может определять оператор A в нормированных пространствах последовательностей.

Например, если $\gamma = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty$, то A является ограниченным линейным оператором в пространстве m ограниченных числовых последовательностей. Действительно, пусть $x = (x_i)_1^{\infty} \in m$, а $x^{(n)}$ имеет первые

n координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а остальные – нули.

Тогда $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| |x_j| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \sup_J |x_j| \le \gamma_n \left\|x^{(n)}\right\|_k \le \gamma \|x\|_m$,

где $\|x\|_k = \sup_{1 \le i \le n} |x_i|$, $\gamma_n = \sup_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Значит, $\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j\right| \le \gamma \|x\|_m$, откуда $\|Ax\|_m \le \gamma \|x\|_m$.

Рассмотрим бесконечную матрицу $\mathrm{A} = (a_{ij})$; $i, j = 1, 2, \ldots$, такую, что $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty$, $q > 1$. Тогда равенство $y = \mathrm{A}x$ определяет линейный непрерывный оператор A, заданный на l_p с нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}$ и принимающий значения в l_q, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Покажем, что $y \in l_q$, если $x \in l_p$. Имеем (пользуясь неравенством Гельдера для сумм)

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j\right|^q \le \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q\right)^{1/q} \right\}^q =$$

$$= \|x\|^q \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \le \|x\|^q \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q .$$

Так как это неравенство верно для любого n, то можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Тогда получим

$$\|y\|^q = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \le \|x\|^q \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q$$

и, значит, $y \in l_q$, A – ограниченный оператор с нормой $\|A\| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q\right)^{1/q}$. Отметим, что при $p = 2$ $q = 2$.

Задачи для самостоятельного изучения

Задача 1.1. Докажите, что для линейного оператора A $R(A)$ – линейное многообразие в Y.

Задача 1.2. Рассмотрите оператор интегрирования $\left(Ax\right)\left(t\right) \doteq \int\limits_{0}^{t} x(s)ds$ как оператор, действующий в пространстве $C\left[0,1\right]$, $A: C\left[0,1\right] \to C\left[0,1\right]$. Покажите, исходя непосредственно из определений, что A – линейный ограниченный оператор и найдите его норму.

Задача 1.3. Доказать, что следующие операторы являются линейными ограниченными и найти их нормы:

а) $A: C\left[-1,1\right] \to C\left[0,1\right], \quad Ax(t) = t^2 x(0)$;

б) $A: C\left[0,1\right] \to C\left[0,1\right], \quad Ax(t) = x(t^2)$;

в) $A: C^1\left[a,b\right] \to C\left[a,b\right], \quad Ax(t) = x(t)$.

Задача 1.4. Найдите норму оператора $A: C\left[0,1\right] \to C\left[0,1\right]$, если:

а) $(Ax)(t) = \int\limits_{0}^{1} \sin \pi \left(t - s\right) x(s)ds$;

б) $(Ax)(t) = \int\limits_{0}^{1} e^{\alpha(t-s)} x(s)ds \quad \left(\alpha > 0\right)$;

в) $(Ax)(t) = \int\limits_{0}^{1} t^{\alpha} s^{\beta} x(s)ds \quad \left(\alpha > 0, \beta > 0\right)$.

Задача 1.5. Пусть X, Y – линейные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор и система элементов $x_1, x_2, ..., x_n \in D(A)$ линейно зависима. Доказать, что система $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ линейно зависима.

Задача 1.6. Пусть X, Y – линейные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор и система элементов линейно $x_1, x_2, ..., x_n \in D(A)$ независима. Верно ли, что система элементов $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ линейно независима?

Задача 1.7. Оператор $A: l_2 \to l_2$ определяется равенством $A(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_k x_k, ...)$; укажите $D(A)$ и $R(A)$; при каких $\lambda_k \left(k = 1, 2, ...\right)$ непрерывен? Найдите его норму.

Задача 1.8. Пусть $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система (ОНС) в гильбертовом пространстве H, $\left\{c_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная числовая последовательность. Докажите, что равенства $Ae_n = c_n e_n \; (n = 1, 2, ...)$ определяют ограниченный линейный оператор $A: H \to H$. Укажите $D(A)$. Найдите норму этого оператора.

Задача 1.9. В пространстве $C[-1,1]$ рассмотрите операторы $(Ax)(t)=\frac{1}{2}(x(t)+x(-t))$, $(Bx)(t)=\frac{1}{2}(x(t)-x(-t))$. Докажите, что A,B – линейные ограниченные операторы; укажите $R(A)$, $R(B)$; найдите нормы этих операторов.

Задача 1.10. Докажите, что линейный дифференциальный оператор

$$A:C^{(n)}[a,b]\to C[a,b],\ (Ax)(t)=\sum_{k=0}^{n}p_k(t)x^{(n-k)}(t)$$

$(p_k\in C[a,b],\ k=0,1,...,n)$ ограничен, оцените сверху его норму.

1.2. Пространство линейных операторов. Сходимость линейных операторов. Продолжение линейного оператора по непрерывности

Пусть X,Y – ЛНП, оба вещественные или оба комплексные, A,B – ограниченные линейные операторы, определенные на всем X, со значениями в Y. Полагая, по определению,

$$(A+B)x=Ax+Bx,\ \lambda A(x)=\lambda Ax,\ \|A\|=\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Ax\|,$$

получаем линейное нормированное *пространство* $L(X,Y)$ *ограниченных линейных операторов*.

В пространстве $L(X,X)=L(X)$ полагаем, по определению $(AB)x=A(Bx)$, тем самым $L(X)$ становится алгеброй с единицей, где единицей является *тождественный оператор* $I:X\to X, Ix=x$.

Определение 1.9. Последовательность $A_n\in L(X,Y)$ $(n\in\mathbf{N})$ называют *равномерно сходящейся* (*сходящейся по норме*) к оператору $A\in L(X,Y)$ и записывают $A_n\to A\quad(n\to\infty)$, если $\|A_n-A\|\to 0\quad(n\to\infty)$.

Определение 1.10. Последовательность $A_n\in L(X,Y)$ $(n\in\mathbf{N})$ называют *сильно сходящейся* к оператору $A\in L(X,Y)$ и записывают $A_n\to A\quad(n\to\infty)$ *сильно*, если для любого $x\in X$ $\|A_nx-Ax\|\to 0\quad(n\to\infty)$.

Теорема 1.5. Если Y – банахово пространство, то $L(X,Y)$ – банахово пространство.

Доказательство данной теоремы будет представлено далее в примерах 1.12 - 1.14.

Теорема 1.6. Пусть $X, Y -$ банаховы пространства, $A_n \in L(X,Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ и для любого $x \in X$ последовательность $A_n x$ ограничена, тогда последовательность $\|A_n\|$ ограничена.

Определение 1.11. Множество $X_1 \subset X$ называется *всюду плотным* в X, если $\overline{X_1} \subset X$.

Теорема 1.7. Пусть X, Y – банаховы пространства, $A_n \in L(X,Y)$ $(n \in \mathbf{N})$. Для того чтобы последовательность A_n при $n \to \infty$ сильно сходилась к оператору $A \in L(X,Y)$, необходимо и достаточно, чтобы:

1) последовательность $\|A_n\|$ была ограничена;

2) $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ сильно на некотором линейном многообразии, всюду плотном в пространстве X.

Теорема 1.8. Равномерная сходимость последовательности операторов влечет ее сильную сходимость (к тому же предельному оператору), обратное утверждение не верно.

Доказательство. Пусть $A_n \to A$; это означает $\|A_n - A\| \to 0$; пусть $x \in X$; тогда

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \le \|A_n - A\| \cdot \|x\| \to 0 \Rightarrow \|A_n x - Ax\| \to 0.$$

Докажем, что из сильной сходимости еще не следует ее равномерная сходимость. С этой целью рассмотрим пример.

Пусть $X = Y = l_2, A_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$,

$x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_2$. Покажем, что для всех $n \in \mathbf{N}$ A_n – ограниченный оператор и $\|A_n\| = 1$. Для любого $x \in l_2$ $\|A_n x - Ix\|^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 \to 0$ как остаток сходящегося ряда; значит, $A_n \to I$ сильно. Рассмотрим последовательность нормированных элементов

$$\hat{x}^{(n)} = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \ldots \right), \quad \|\hat{x}^{(n)}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}} = 1.$$

По теореме 1.4

$$\|A_n - I\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - I)x\| \ge \|(A_n - I)\hat{x}^{(n)}\| = \|A_n \hat{x}^{(n)} - \hat{x}^{(n)}\| = \|\theta - \hat{x}^{(n)}\| = 1.$$

Следовательно, A_n не сходится равномерно к I.

Теорема 1.9. Пусть X – ЛНП, Y – банахово пространство, $A: X \to Y$ – линейный оператор, причем $\overline{D(A)} = X$ и на $D(A)$ оператор A ограничен. Тогда существует ограниченный линейный оператор $\hat{A} \in L(X,Y)$, что $\hat{A}x = Ax$ для любого $x \in D(A)$ и $\|\hat{A}\| = \|A\|$.

При этом оператор $\hat{A}$ называется *продолжением* оператора A на все пространство X.

Пример 1.11. Пусть $\{A_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$, $A \in L(X,Y)$. Докажем, что $\{A_n\}$ сходится равномерно к A тогда и только тогда, когда последовательность $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в пространстве Y к Ax равномерно относительно x в шаре $\overline{U_1}(0)$. Пусть $A_n \to A$. Это значит, что $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n > \mathbb{N})$ $(\|A_n - A\| < \varepsilon)$. Следовательно, для $x \in \overline{U_1}(0)$, имеем

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \le \|A_n - A\| \cdot \|x\| \le \|A_n - A\| < \varepsilon,$$

т.е. $A_n x \to Ax$ равномерно на $\overline{U_1}(0)$.

Пусть $A_n x \to Ax$ равномерно на $\overline{U_1}(0)$. Это значит, что

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > \mathbb{N})\ \left(\forall x \in \overline{U_1}(0)\right)\ \ \|A_n x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что $\sup\limits_{\|x\|=1} \|A_n x - Ax\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| \le \frac{\varepsilon}{2}$.

По теореме 1.4 $\|A_n - A\| \le \frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $A_n \to A$.

Пример 1.12. Пусть $A \in L(X,Y)$, $B \in L(X,Y)$, докажем, что тогда $C = A + B$ и $D = \lambda A$ – линейные ограниченные операторы, действующие из X в Y.

Если A и B линейные ограниченные операторы, то

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\|,$$

т. е. $A + B$ – линейный ограниченный оператор, причем

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|. \tag{1.1}$$

Оператор λA также ограничен, причем

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|. \tag{1.2}$$

Таким образом, множество $L(X,Y)$ линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y, образует ЛНП операторов. Введем в нем норму: $\|A\|_{L(X,Y)} \doteq \|A\|$; положительная однородность следует из (1.2), неравенство треугольника – из (1.1); аксиома тождества, очевидно, также выполняется.

Пример 1.13. Если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная последовательность операторов из $L(X,Y)$, а Y – банахово пространство, то она имеет предел $Ax=\lim\limits_{n\to\infty}A_nx$ при каждом $x\in X$.

По условию $\|A_n-A_m\|\to 0$ при $n,m\to\infty$. Пусть $x\in X$ – произвольный элемент. Покажем, что последовательность $\{A_nx\}_{n=1}^{\infty}\subset Y$ фундаментальна. Имеем

$$\|A_nx-A_mx\|=\|(A_n-A_m)x\|\le\|A_n-A\|\cdot\|x\|\to 0\ \left(n,m\to\infty\right),$$

следовательно, $\|A_nx-A_mx\|\to 0$. В силу полноты Y найдется $y\in Y$ такой, что $A_nx\to y$; таким образом, каждому $x\in X$ ставится в соответствие элемент $\lim\limits_{n\to\infty}A_nx\in Y$, т.е. имеем оператор $A:\ X\to Y$, определяемый равенством $Ax=\lim\limits_{n\to\infty}A_nx$.

Пример 1.14. Докажем, что оператор A из примера 1.13 – ограниченный линейный оператор, действующий из X в Y.

Так как $\|A_n\|-\|A_m\|\le\|A_n-A_m\|$, то числовая последовательность $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ также фундаментальна и, следовательно, ограничена: существует $C\ge 0$ такое, что $\|A_n\|\le C$ для $n\in\mathbf{N}$. В итоге

$$\|A_nx\|\le\|A_n\|\cdot\|x\|\le C\|x\|\ \Rightarrow\|A_nx\|\le C\|x\|.$$

Переход к пределу при $n\to\infty$ в последнем неравенстве дает $\|Ax\|\le C\|x\|$, т.е. $A\in L(X,Y)$.

Из утверждений, доказанных в примерах 1.13-1.14, следует полнота пространства $L(X,Y)$.

Пример 1.15. Пусть X,Y – линейные нормированные пространства, $x_n,x\in X,\quad A_n,A\in L\left(X,Y\right)\ \left(n\in N\right),\ x_n\to x,\ A_n\to A\ \left(n\to\infty\right)$. Докажем, что $A_nx_n\to Ax\ \left(n\to\infty\right)$.

Так как при $n\to\infty$ $\|A_n-A\|\to 0$, $\|x_n-x\|\to 0$, а последовательность $\{\|x_n\|\}$ ограничена (как сходящаяся), то

$$\|A_n x_n - Ax\| \le \|A_n x_n - Ax_n\| + \|Ax_n - Ax\| = \|(A_n - A)x_n\| + \|A(x_n - x)\| \le$$
$$\le \|A_n - A\|\cdot\|x_n\| + \|A\|\cdot\|x_n - x\| \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Пример 1.16. Докажем, что последовательность A_n, определенная по правилу

$$(A_n x)(t) \doteq \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} x(s)\,ds \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходится.

Так как $S_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}$ – частичная сумма ряда Тейлора для экспоненты e^s, (который сходится равномерно на любом отрезке вещественной оси, а значит и на $[0,1]$), то предельный оператор должен иметь вид $(Ax)(t) = \int_0^t e^s x(s)ds$. Покажем, что $A_n \to A \ (n\to\infty)$.

Пусть $x \in \overline{U_1}(0)$; тогда

$$\|(A_n - A)x\| = \max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t\left(e^s - \sum_{k=0}^{n}\frac{s^k}{k!}\right)x(s)ds\right| \le \max_{t\in[0,1]}\int_0^t \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{s^k}{k!}|x(s)|ds \le$$

$$\le \|x\|\int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{s^k}{k!}ds \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!} \to 0$$

при $n\to\infty$, как остаток сходящегося числового ряда. Таким образом, в силу результата примера 1.11 $\{A_n\}$ сходится равномерно к $A \quad (n\to\infty)$.

Пример 1.17. Последовательность операторов $A_n : l_2 \to l_2,\ n\in\mathbf{N}$ определяется равенством

$$A_n(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots).$$

Исследуем ее на сходимость. Так как для любого $x \in l_2$

$$\|A_n x - x\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

(как остаток сходящегося ряда), то $A_n \to I \quad (n\to\infty)$ сильно.

Покажем, что равномерной сходимости здесь нет. Пусть $\hat{x}^{(n)} = \left(\underbrace{0,\ldots,0}_{n}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \ldots\right)$; тогда $\left\|\hat{x}^{(n)}\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1$. Согласно теореме 1.4 $\|A_n - I\| \ge \left\|(A_n - I)\hat{x}^{(n)}\right\| = \left\|\hat{x}^{(n)}\right\| = 1$, т.е. последовательность не сходится равномерно.

Пример 1.18. Пусть X – ЛНП, $A \in L(X)$, $B: X \to X$ – неограниченный оператор с плотной в X областью определения $D(B)$. Покажем, что произведение AB может быть как ограниченным, так и неограниченным оператором.

Пусть $X = C[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds, \quad (B_1x)(t) = x'(t), \quad (B_2x)(t) = x''(t);$$

тогда оператор A всюду определен и ограничен, $D(B_1)$ – всюду плотное в $C[0,1]$ множество непрерывно дифференцируемых функций; $D(B_2)$ – всюду плотное в $C[0,1]$ множество дважды непрерывно дифференцируемых функций; при этом операторы B_1 и B_2 неограниченные ; тогда оператор AB_1 – ограниченный, а оператор AB_2 – неограниченный. Действительно,

$$(AB_1)(t) = \int_0^t x'(s)ds = x(t) - x(a), \quad (AB_2)(t) = \int_0^t x''(s)ds = x'(t) - x'(a).$$

Задачи для самостоятельного изучения

Задача 1.11. Пусть X, Y – банаховы пространства, $x_n, x \in X$, $A_n, A \in L(X,Y)$ $(n \in \mathbf{N})$, $x_n \to x$, $A_n \to A$ сильно $(n \to \infty)$. Докажите, что $A_n x_n \to Ax$ $(n \to \infty)$.

Задача 1.12. Пусть $D(A) = \{x \in C[0,1]:\ x' \in C[0,1]\}$, $(Ax)(t) \doteq x'(t)$,

$$(A_n x)(t) \doteq n\left(x\left(t + \frac{1}{n}\right) - x(t)\right) \quad (n = 1,2,...,\ x(t) = x(1) \text{ при } t > 1).$$

Докажите, что $A_n \to A$ сильно.

Задача 1.13. Докажите, что операторы A_n из задачи 1.12 не сходятся равномерно.

Задача 1.14. Докажите, что последовательность $(A_n x)(t) = t^n(1-t)x(t)$, $A_n : C[0,1] \to C[0,1]$ $(n = 1, 2,...)$ равномерно сходится к нулевому оператору.

Задача 1.15. Докажите, что последовательность, определенная по правилу $(A_n x)(t) = n \cdot \int_t^{t+\frac{1}{n}} x(s)ds$, $A_n : C[0,1] \to C[0,1]$ $(n = 1,2,...)$ сильно сходится к тождественному оператору.

Задача 1.16. Выяснить, сходится ли последовательность из задачи 1.15 равномерно?

Задача 1.17. Последовательности операторов $B_n, C_n : l_2 \to l_2,\ n \in \mathbf{N}$ определяются равенствами:

а) $B_n(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ...)$;

б) $C_n(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = \left(\dfrac{x_1}{n}, \dfrac{x_2}{n}, ...\right)$.

Исследуйте эти последовательности на сходимость.

Задача 1.18. Пусть H – гильбертово пространство, $L \subset H$ – линейное многообразие, A – ограниченный линейный оператор, заданный на L со значениями в банаховом пространстве Y. Доказать, что A может быть продолжен на все H с сохранением нормы.

Задача 1.19. Пусть X, Y, Z – банаховы пространства, $A_n, A \in L(X, Y)$, $B_n, B \in L(Y, Z)\ (n \in \mathbb{N})$, $A_n \to A$ сильно (равномерно), $B_n \to B$ сильно (равномерно) $(n \to \infty)$. Докажите, что $B_n A_n \to BA$ сильно (равномерно) $n \to \infty$.

1.3. Обратные линейные операторы. Теорема Банаха

Пусть X, Y – ЛНП, $A : X \to Y$ – линейный оператор, отображающий $D(A)$ на $R(A)$ взаимно однозначно.

Определение 1.12. Оператор $A^{-1} : Y \to X$, который ставит в соответствие каждому $y \in R(A)$ элемент $x \in D(A)$ такой, что $y = Ax$, называется оператором, *обратным* оператору A.

Из этого определения следует, что $A^{-1}(A(x)) = x$,т.е. $A^{-1}A = I$.

Определение 1.13. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *непрерывно обратимым*, если $R(A) = Y$, A^{-1} существует и ограничен, т.е. $A^{-1} \in L(Y, X)$.

Теорема 1.10. Оператор A^{-1} существует и ограничен на $R(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $m > 0$ и любого $x \in D(A)$ выполняется неравенство $\|Ax\| \geq m\,\|x\|$.

Теорема 1.11 (Банах). Пусть X, Y – банаховы пространства, $A \in L(X, Y)$, $R(A) = Y$ и A обратим. Тогда A непрерывно обратим.

Теорема 1.12. Пусть X – банахово пространство, $C \in L(X)$ и $\|C\| < 1$. Тогда оператор $I - C$ непрерывно обратим и справедлива оценка

$$\left\|(I-C)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\|C\|}.$$

Теорема 1.13. Пусть X – банахово пространство, $A, B \in L(X)$, A непрерывно обратим и выполняется неравенство

$$\|B-A\| \le \left\|A^{-1}\right\|^{-1}.$$

Тогда B непрерывно обратим и справедлива оценка

$$\left\|B^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\|B-A\|\left\|A^{-1}\right\|}.$$

В курсе линейной алгебры доказывается следующая теорема.

Теорема 1.14. Пусть $A: D(A) \to R(A)$ – линейный оператор. Тогда для существования оператора $A^{-1}: R(A) \to D(A)$ необходимо и достаточно, чтобы $N(A)=\{0\}$.

Пусть X, Y – ЛНП, $A \in L(X,Y)$.

Определение 1.14. Оператор $A_r^{-1} \in L(Y,X)$ называется *правым обратным* к A, если $A A_r^{-1} = I_Y$, оператор $A_l^{-1} \in L(Y,X)$ называется *левым обратным* к A, если $A_l^{-1} A = I_X$, где I_Y и I_X – тождественные операторы соответственно в пространствах Y и X.

Пример 1.19. Докажем, что линейный оператор может иметь только один обратный оператор.

Пусть B и C – два оператора, обратных оператору A. Тогда, с одной стороны, $BAC = B(AC) = BI_y = B$, с другой – $BAC = (BA)C = I_x C = C$. Это означает, что $B = C$.

Пример 1.20. Пусть линейный оператор $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ определяется в выбранном базисе матрицей A (см. пример **1.3.**). Необходимым и достаточным условием непрерывной обратимости оператора A является условие $\det \mathrm{A} \ne 0$. При этом обратная матрица A^{-1} является матрицей обратного оператора A^{-1} в том же базисе.

Пример 1.21. Рассмотрим в $C[0,1]$ интегральное уравнение $\left(y(t) \in C[0,1]\right)$ относительно неизвестной функции

$$x(t) \in C[0,1]: (Ax)(t) \equiv x(t) - \int_0^1 tsx(s)ds = y(t).$$

Заметим, что $x(t)=y(t)+ct$, где $c=\int_0^1 sx(s)ds$. Интегрируя равенство $tx(t)=ty(t)+ct^2$ на $[0,1]$, находим $c=\frac{3}{2}\int_0^1 sy(s)ds$. Следовательно, при любой правой части $y(t)$ решение исходного уравнения имеет вид

$$x(t)=y(t)+\frac{3}{2}\int_0^1 sty(s)ds \equiv \left(A^{-1}y\right)(t).$$

Пример 1.22. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Пусть функции $y(t)$ и $a_i(t)$, $i=1,...,n$, непрерывны на $[0,T]$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Ax \equiv x^{(n)}(t)+a_1(t)x^{(n-1)}(t)+...+a_n(t)x(t)=y(t). \qquad (1.3)$$

Будем решать для него задачу Коши, т.е. найдем его решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0)=x'(0)=...=x^{(n-1)}(0)=0. \qquad (1.4)$$

Область определения $D(A)$ пусть состоит из n раз непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям (1.4).

Пусть $x_1(t),...,x_n(t)$ – система из n линейно независимых решений соответствующего (1.3) однородного уравнения [т.е. (1.3) при $y(t)\equiv 0$]. Составим определитель Вронского

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & ...\, x_n(t) \\ x_1'(t) & ...\, x_n'(t) \\ \multicolumn{2}{l}{.....................} \\ x_1^{(n-1)}(t) & ...\, x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Известно, что $W(t)\neq 0$ на $[0,T]$. Согласно методу Лагранжа вариации постоянных, решение задачи (1.3) – (1.4) ищется в виде

$$x(t)=c_1(t)x_1(t)+...+c_n(t)x_n(t),$$

причем для произвольных неизвестных функций $c_i(t)$ возникает следующая система уравнений:
$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t)+...+c_n'(t)x_n(t)=0, \\ c_1'(t)x_1'(t)+...+c_n'(t)x_n'(t)=0, \\ .... \\ c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+...+c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t)=y(t). \end{cases}$$

Решая ее по правилу Крамера, находим

$$c_k'(t)=\frac{W_k(t)}{W(t)}y(t),\ k=1,2,...,n,$$

где $W_k(t)$–алгебраическое дополнение k-го элемента n-й строки определителя $W(t)$.

Учитывая начальные условия (1.4), находим решение задачи (1.3) – (1.4) в явном виде:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n} x_k(t)\int_0^t \frac{W_k(s)}{W(s)}y(s)ds\,. \tag{1.5}$$

Это решение единственно.

Из формулы (1.5) вытекает непрерывная обратимость оператора A. Действительно $\|x\|_{C[0,T]}\le c\,\|y\|_{C[0,T]}$, где $c=\max\limits_{[0,T]}\sum_{k=1}^{n}|x_k(t)|\int_0^t\left|\frac{W_k(s)}{W(s)}\right|ds$.

Пример 1.23. Для дифференциального уравнения (1.3) рассмотрим более общую задачу Коши: найти решение (1.3), удовлетворяющее начальным условиям ($x_0, x_1,\dots,x_{n-1}$ заданы)

$$x(0)=x_0,\ x'(0)=x_1,\dots,x^{(n-1)}(0)=x_{n-1}\,. \tag{1.6}$$

Решение задачи (1.3), (1.6) также дается явной формулой:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n} x_k(t)\int_0^t \frac{W_k(s)}{W(s)}y(s)ds+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k(t)\,, \tag{1.7}$$

где постоянные определяются из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k^l(0)=x_l\,,\ l=0,1,\dots,n-1\,,$$

с определителем $W(0)\ne 0$.

С операторной точки зрения этот результат можно трактовать так: оператор B определен на $D(B)$, состоящей из n раз непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ функций $D(B)\subset C[0,T]$, и действует в пространство Y, элементы которого – набор функций $y(t)\in C[0,T]$ и вектора $\left(x^{(i)}(0)\right)_{i=0}^{n-1}\in E^n$.

Оператор B действует по формуле $Bx=\left\{Ax;\,x(0),\dots,x^{(n-1)}(0)\right\}$. Из формулы (1.7) вытекает непрерывная обратимость оператора B.

Пример 1.24. Рассмотрим задачу Коши $\dot{x}=B(t)x+y(t)$, $x(a)=0$ для системы n дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями, записанную в векторно-матричной форме. Здесь $B(t)$ – $n\times n$- матрица, элементы которой непрерывные на $[a,b]$ функции,

$y(t)$ – непрерывная n-вектор-функция, $x(t)$ – непрерывно дифференцируемая n-вектор-функция. Определим оператор $Ax\doteq\dot{x}-B(t)x$ с областью определения

$$D(A) \doteq \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T : \dot{x}_k \in C[a,b], x_k(a) = 0 \ \ (k = 1, 2, ..., n) \right\} \subset$$
$$\subset C^n[a,b] \doteq \underbrace{C[a,b] \times C[a,b] \times ... \times C[a,b]}_{n} \doteq X, \quad Y \doteq C^n[a,b].$$

Так как уравнение $Ax = y$ при любом $y \in Y$ имеет решение, то здесь $R(A) = Y$. Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица однородной системы $\dot{x} = B(t)x$, $C(t,s) = X(t)X^{-1}(s)$ – матрица Коши этой системы. Тогда решение уравнения $Ax = y$, как известно, имеет вид:

$$x(t) = \int_a^t C(t,s)y(s)ds.$$

Таким образом, обратный оператор задается равенством

$$A^{-1}y = \int_a^t C(t,s)y(s)ds.$$

Пример 1.25. Докажем, что оператор

$$A : C[0,1] \to C[0,1], \ (Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds + x(t)$$

непрерывно обратим; найдем A^{-1}.

Для нахождения обратного оператора надо решить относительно функции $x(t)$ уравнение $(Ax)(t) = y(t)$, где $y \in C[0,1]$ произвольна; в нашем случае это уравнение $\int_0^t x(s)ds + x(t) = y(t)$. Заметим, что этого нельзя добиться дифференцированием последнего уравнения, так как x и y не предполагаются дифференцируемыми. Введем обозначение $\int_0^t x(s)ds = z(t)$; z – непрерывно дифференцируема, $z(0) = 0$, $z'(t) = x(t)$. Таким образом, наше уравнение запишется как задача Коши $z + z' = y$, $z(0) = 0$.

Решение этой задачи

$$z(t) = \int_0^t e^{-(t-s)}y(s)ds,$$

отсюда дифференцированием получаем

$$x(t) = z'(t) = -\int_0^t e^{-(t-s)}y(s)ds + y(t).$$

Итак, показано, что $\left(A^{-1}y\right)(t)=y(t)-\int\limits_0^t e^{-(t-s)}y(s)\,ds$; A^{-1} есть разность тождественного оператора и линейного интегрального оператора Вольтерры, значит, является непрерывным.

Пример 1.26. Пусть X – ЛНП, $A,B:X\to X$ – всюду определенные линейные операторы, и оператор $C=\left(I-AB\right)^{-1}$ существует. Докажем, что существует оператор $D=\left(I-BA\right)^{-1}$ и выразим его через C.

По условию $\left(I-AB\right)C=I$; умножим обе части этого равенства слева на B, справа на A: $B\left(I-AB\right)CA=BA$; далее:

$$BCA-BA\left(I+BCA\right)=0\Rightarrow I+BCA-BA(I+BCA)=I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(I-BA\right)\left(I+BCA\right)=I\,;$$

непосредственно проверяется также равенство $\left(I+BCA\right)\left(I-BA\right)=I$. Таким образом, оператор $D=\left(I-BA\right)^{-1}$ существует и $D=I+BCA$.

Пример 1.27. Пусть H гильбертово пространство, (a,x) скалярное произведение элементов $a,x\in H$. Рассмотрим оператор $Ax=(a,x)b$ $(a,b,x\in H,\, a\neq 0,\, b\neq 0)$ как оператор из H в одномерное пространство $Y\doteq\langle b\rangle$, порожденное элементом b. Докажем, что существует оператор A_r^{-1} и найдем его. Докажем, что оператор A_l^{-1} не существует.

Линейность оператора A следует из линейности скалярного произведения; $D(A)=H$, $R(A)=\langle b\rangle$; с помощью неравенства Коши - Буняковского получаем

$\|A\|=|(a,x)|\cdot\|b\|\le\|a\|\cdot\|x\|\cdot\|b\|\Rightarrow$ A ограничен, $\|A\|\le\|a\|\cdot\|b\|$; полагая $\hat{x}=\dfrac{a}{\|a\|}$ и ссылаясь на теорему 1.4, получаем противоположное неравенство $\|A\|\ge\|A\hat{x}\|=\|a\|\cdot\|b\|$, а с ним и равенство $\|A\|=\|a\|\cdot\|b\|$.

Оператор A_l^{-1} не существует, так как уравнение $Ax=y$ имеет более одного решения, и $N(A)\neq\{\theta\}$. Оператор A_r^{-1} существует, так как теперь $R(A)$ – все пространство Y.

Пусть $Ax=(a,x)b$; легко видеть, что $x=\alpha\dfrac{a}{\|a\|^2}$ – решение уравнения $Ax=y\ (y=\alpha b)$; значит, $A_r^{-1}y=\alpha\dfrac{a}{\|a\|^2}\ (y=\alpha b)$.

Пример 1.28. Выясним, какие из следующих операторов, действующих в пространстве $l_p\ (1\le p<+\infty)$, обратимы на всем l_p :

а) $Ax=(x_2, x_3,...)$, где $x=(x_1,x_2,...)$;

б) $Ax=y,\ y=(y_1,y_2,...),\ y_k=\sum\limits_{j=1}^{n}b_{kj}x_j,\ k=1,2,...,n,$ где $B=\left(b_{kj}\right)_{k,j=1}^{n}$ матрица, $y_k=x_k,\ k=n+1,n+2,...,\ n\in\mathbf{N}$.

а) обратный оператор не существует, так как $N(A)=\langle(1,0,0,...)\rangle\ne\{\theta\}$;

б) здесь преобразуются матрицей $B=\left(b_{kj}\right)_{k,j=1}^{n}$ только первые n координат; оператор будет обратимым в том, и только том случае, если $\det B\ne 0$, тогда $N(A)=\{\theta\}$. Пусть $B^{-1}=\left(c_{kj}\right)_{k,j=1}^{n}$, тогда

$$x=A^{-1}y,\ x_k=\sum_{j=1}^{n}c_{kj}y_j,\ k=1,2,...,n,\ x_k=y_k,\ k=n+1,n+2,....$$

Задачи для самостоятельного изучения

Задача 1.20. Докажите, что оператор, обратный линейному, линеен.

Задача 1.21. Докажите, что $N(A)$ – линейное многообразие в X.

Задача 1.22. Докажите, что если $A\in L(X,Y)$, то $N(A)$ подпространство X (т.е. является замкнутым в X).

Задача 1.23. Докажите, что оператор дифференцирования $A:C^{(1)}[0,1]\to C[0,1],\ Ax\doteq\dfrac{dx}{dt}$ не имеет обратного.

Задача 1.24. Докажите, что оператор дифференцирования $A:C^{(1)}[0,1]\to C[0,1],\ Ax\doteq\dfrac{dx}{dt},\ D(A)=\left\{x\in C^{(1)}[0,1]:x(0)=0\right\}$, имеет обратный. Найдите его.

Задача 1.25. Докажите, что оператор $A:C^{(1)}[a,b]\to C[a,b]$, $(Ax)(t)\doteq x'+p(t)x,\ D(A)=\left\{x\in C^{(1)}[a,b]:x(a)=0\right\},\ p\in C[a,b]$, имеет обратный. Найдите его.

Задача 1.26. Докажите, что оператор $A:C^{(2)}[a,b]\to C[a,b]$, $(Ax)(t)\doteq x''+p(t)x'+q(t)x,\ D(A)=\{x\in C^{(2)}[a,b]:x(a)=0,\,x'(a)=0\}$, $p,q\in C[a,b]$, имеет обратный.

Задача 1.27. Найдите оператор, обратный к оператору $A:C^{(2)}[a,b]\to C[a,b],\quad (Ax)(t)\doteq x''+\mathrm{q}x$,

$$D(A)=\{x\in C^{(2)}[a,b]:x(a)=0,\,x'(a)=0\},\,(\mathrm{q}\in\mathbf{R}).$$

Задача 1.28. Обратим ли оператор интегрирования $(Ax)(t)\doteq\int\limits_0^t x(s)ds$ на своем образе? Ограничен ли обратный оператор?

Задача 1.29. При каких значениях λ существует оператор $(I-\lambda A)^{-1}$, если $(Ax)(t)=\int\limits_0^1 t^2s^3x(s)ds,\,A:C[0,1]\to C[0,1]$? Найдите оператор $(I-\lambda A)^{-1}$.

Задача 1.30. Пусть H – гильбертово пространство, $a,b\in H$, $Ax\doteq x-\lambda(a,x)b$. При каких значениях λ оператор A непрерывно обратим? Найдите A^{-1}.

Задача 1.31. Какие из следующих операторов, действующих в пространстве $l_p\,(1\le p<+\infty)$, обратимы на всем l_p $\ x=(x_1,x_2,...)$:

а) $Ax=(0,x_1,x_2,...)$;

б) $Ax=(x_1,2x_2+x_3,5x_2+3x_3,x_4,x_5,...)$;

в) $Ax=y,\,y=(y_1,y_2,...),\,y_k=\lambda_k x_k$, $k=1,2,...$, $0<\lambda_k\le K$, $k=1,2,...$, где $K>0$ – заданное число?

Задача 1.32. Докажите, что оператор дифференцирования $A:C^{(1)}[0,1]\to C[0,1],\ Ax=\dfrac{dx}{dt}$ имеет правый обратный, но не имеет левого обратного. Найдите правый обратный оператор.

Задача 1.33. Докажите, что оператор интегрирования $A:C[0,1]\to C[0,1],\ (Ax)(t)=\int\limits_0^t x(s)ds$ на всем пространстве $C[0,1]$ не имеет правого обратного, но имеет левый обратный. Найдите его.

Ответы и указания к задачам

1.1. Пусть $y_1, y_2 \in R(A) \subset Y$; по определению образа найдутся $x_1, x_2 \in D(A) \subset X$ такие, что $y_i = Ax_i, i = 1,2$, причем $x = \alpha x_1 + \beta x_2 \in D(A), \alpha, \beta \in \mathbf{R}$. В силу линейности оператора A и определения образа $R(A)$:

$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = A(\alpha x_1 + \beta x_2) = Ax \in R(A)$.

Таким образом, $R(A)$ содержит линейные комбинации своих элементов, что и требуется.

1.2. $\|Ax\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^t x(s)ds \right| \le \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^t |x(s)|ds \le \max\limits_{s\in[0,1]} |x(s)| \cdot \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^t ds \le \|x\|$.

Таким образом, оператор A ограничен и $\|A\| \le 1$. Пусть $\hat{x}(t) \equiv 1$;

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \ge \|A\hat{x}\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^t 1ds = 1$. Значит, $\|A\| \ge 1,$ и тогда $\|A\| = 1$.

1.3. а) – в) $\|A\| = 1$. **1.4.** Согласно результату из примера **1.9.** $\|A\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 |K(t,s)|ds$. Поэтому а) $\|A\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 |\sin \pi(t-s)|ds = \dfrac{2}{\pi}$; б) $\|A\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 e^{\alpha(t-s)}ds = \dfrac{e^{\alpha} - 1}{\alpha}$; в) $\|A\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 t^{\alpha} s^{\beta} ds = \dfrac{1}{1+\beta}$. **1.6.** Нет.

1.7. Область определения $D(A)$ состоит из последовательностей $x \in l_2$, для которых сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k x_k|^2$; образ $R(A)$ состоит из тех $y \in l_2$, для которых $y_k = 0$ при $\lambda_k = 0$; если $\lambda_k \ne 0\ (k = 1,2,...)$, то $R(A) = l_2$;

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k x_k|^2 \le K^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = K^2 \|x\|^2 ,$$

$K = \sup\limits_{k\in\mathbf{N}} |\lambda_k|$; таким образом, оператор A непрерывен, если последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена; при этом $\|A\| \le K$; докажем противоположное неравенство. Если $K = \sup\limits_{k\in\mathbf{N}} |\lambda_k| = |\lambda_{k_0}|$ при некотором k_0, то положим $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, ...),\ \hat{x}_{k_0} = 1,\ \hat{x}_k = 0 \quad (k \ne k_0)$; в противном случае существует последовательность $|\lambda_{k_j}| \to K$; тогда положим $\hat{x}_j = \lambda_{k_j},\ \ j = 1,2,...$; в обоих случаях с помощью теоремы 1.4 получаем, что $\|A\| \ge K$, а в итоге $\|A\| = K$.

1.8. $\|A\| = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} |c_n|$ **1.9.** Линейность и ограниченность операторов очевидна. Образ $R(A), \left(R(B)\right)$ представляет собой множество четных (нечетных) функций; $\|A\| = \|B\| = 1$.

1.10. Ограниченность оператора следует из неравенств $\|Ax\|_C \le \sum\limits_{k=0}^{n} \|p_k\|_C \cdot \left\|x^{(n-k)}\right\|_C \le \max\limits_{0\le k\le n} \|p_k\|_C \sum\limits_{k=0}^{n} \left\|x^{(k)}\right\|_C = \max\limits_{0\le k\le n} \|p_k\|_C \cdot \|x\|_{C^{(n)}}$.

1.11. Так как при $n\to\infty$ $\|x_n - x\| \to 0$, последовательность $\left\{\|A_n\|\right\}$ ограничена и при любом $x\in X$ $\|A_n x - Ax\| \to 0$, то $\|A_n x_n - Ax\| \le$
$\le \|A_n x_n - A_n x\| + \|A_n x - Ax\| = \|A_n\|\|x_n - x\| + \|A_n x - Ax\| \to 0 \ (n\to\infty)$.

1.12. Пусть $x\in C[0,1]$ непрерывно дифференцируема. Тогда по формуле Лагранжа $(A_n x)(t) = nx'(\xi_n)\dfrac{1}{n} = x'(\xi_n)$ $\left(t < \xi_n < t + \dfrac{1}{n}\right)$, а в силу равномерной непрерывности $x' : x'(\xi_n) \to x'(t)$ $(n\to\infty)$. Это означает, что при любой функции $x\in D(A)$ $A_n x \to Ax$ в пространстве $C[0,1]$, т.е. $A_n \to A$ сильно. **1.13.** Пусть $\tilde{x}_n(t) = \begin{cases} \dfrac{nt^2}{2}, 0\le t\le \dfrac{1}{n}, \\ t - \dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n} < t \le 1, \end{cases}$

$\hat{x}_n(t) = \dfrac{2n}{2n-1}\tilde{x}_n(t)$ $(n\in\mathbf{N})$, тогда $\|\hat{x}_n\| = 1$,
$\|(A_n - A)\hat{x}_n\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |(A_n - A)\hat{x}_n(t)| = \dfrac{n}{2n-1} > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \|A_n - A\| > \dfrac{1}{2}$, т.е. операторы A_n не сходятся равномерно. **1.14**. Оценим сверху норму оператора $\|A_n\|$: $\|A_n x\| \le \max\limits_{t\in[0,1]} t^n(1-t)\cdot\|x\| = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \cdot \dfrac{1}{n+1}\|x\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|A_n\| \le \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \cdot \dfrac{1}{n+1} \to 0 \Rightarrow \|A_n\| \to 0 \Rightarrow A_n \to 0$, $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1}$.

1.15. Пусть $x\in C[0,1]$; по теореме о среднем

$$(A_n x)(t) = n\int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} x(s)ds = n\cdot x(\xi_n)\cdot\frac{1}{n} = x(\xi_n),\ t < \xi_n < t + \frac{1}{n};$$

в силу равномерной непрерывности $x(\xi_n) \to x(t)$. Следовательно, $A_n x \to x$ в пространстве $C[0,1]$, т.е. $A_n \to I$ сильно. **1.16**. Покажем, что здесь равномерной сходимости нет. Пусть $\hat{x}_n(t)=t^{n-1}$; тогда $\|\hat{x}_n\|=1$, и. $\|(A_n-I)\hat{x}_n\|=\left\|n\int\limits_t^{t+\frac{1}{n}}s^{n-1}ds-t^{n-1}\right\|=\left\|\left(t+\frac{1}{n}\right)^n-t^n-t^{n-1}\right\|=\left\|\frac{n-1}{2n}t^{n-2}+\ldots\right\|\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\|A_n-I\|\ge\frac{1}{2}$.

1.17.а) для любого $x\in l_2$ $B_nx\to 0$ $(n\to\infty)$, следовательно, $B_n\to 0$ сильно. Равномерной сходимости здесь нет, так как согласно теореме 1.4 $\|B_n\|\ge\|B_n\hat{x}^{(n)}\|=\|\hat{x}^{(n)}\|=1$ (последовательность $\hat{x}^{(n)}$ – та же, что и в примере 1.17.); **б)** здесь $C_n\to 0$, так как $\|C_nx\|=\frac{1}{n}\|x\|$; это означает, что $\|C_n\|=\frac{1}{n}\to 0$. **1.18**. Пусть $\overline{L}$ – замыкание L; тогда оператор A может быть продолжен на L с сохранением нормы по теореме 1.9. Пусть P – оператор ортогонального проектирования на L. Положим $Bx=A(Px)$ для $x\in H$. Тогда B – продолжение A с сохранением нормы.

1.19. $\|A_nB_n-AB\|=\|(A_nB_n-A_nB)+(A_nB-AB)\|\le$
$\le\|A_n\|\cdot\|B_n-B\|+\|A_n-A\|\cdot\|B\|\to 0$, так как последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена. **1.20**. Пусть $y_i\in R(A),\alpha,\beta\in\mathbf{R}$; найдутся $x_i\in D(A)$ такие, что $y_i=Ax_i$ $(i=1,2)$; учитывая это, получаем линейность оператора A^{-1}:

$$A^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=A^{-1}(\alpha Ax_1+\beta Ax_2)=A^{-1}A(\alpha x_1+\beta x_2)=$$

$=\alpha x_1+\beta x_2=\alpha A^{-1}y_1+\beta A^{-1}y_2$. **1.21**. Пусть $x,y\in N(A),\alpha,\beta\in\mathbf{R}$; тогда $A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay=0$, т.е. $N(A)$ – линейное многообразие в X. **1.22.** Пусть x^* – предельная точка $N(A)$. Найдется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset N(A)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$. В силу непрерывности оператора A из равенств $Ax_n=0$ $(n=1,2,\ldots)$ следует равенство $Ax^*=0$, которое означает, что $x^*\in N(A)$. Значит $N(A)$ – замкнуто. **1.23**. Данный оператор не имеет обратного, так как имеет нетривиальное ядро: $N(A)$ состоит из функций $x(t)\equiv\text{const}$. **1.24.** В данном случае $N(A)=\{0\}$, $R(A)=C[0,1]$; поэтому обратный оператор существует на всем пространстве $C[0,1]$ и $\left(A^{-1}y\right)(t)=\int\limits_a^t y(s)ds$. **1.25.** Как известно, задача Коши $x'+p(t)x=y(t)$, $x(a)=0$ однозначно разрешима при любой функции $y\in C[a,b]$, а соответствующая однородная задача имеет лишь тривиальное решение $x(t)\equiv 0$. Поэтому $N(A)=\{0\}$, $R(A)=C[a,b]$; это значит, что обратный оператор существует; чтобы его найти, надо найти решение указанной задачи Коши:

$$x(t)=\left(A^{-1}y\right)(t)=\int\limits_a^t e^{-\int\limits_s^t p(\tau)d\tau}y(s)ds.$$

1.26. Решение находится по формуле Коши (см. пример 1.23).

$$\textbf{1.27}.\ A^{-1}y(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{q}}\int\limits_a^t \sin\sqrt{q}(t-s)y(s)ds, q>0,\\ \int\limits_a^t (t-s)y(s)ds, q=0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{q}}\int\limits_a^t \mathrm{s}h\sqrt{-q}(t-s)y(s)ds, q<0.\end{cases}$$

1.28. Да. Из равенства $\int\limits_0^t x(s)ds=0$ при всех $t\in[0,1]$ следует, что $x(t)\equiv 0$; это означает, что $N(A)=\{0\}$. Так как $\left(A^{-1}y\right)(t)=y'(t)$,то A^{-1} – неограниченный оператор. **1.29**. При $\lambda\neq 6$. Найдем оператор $(I-\lambda A)^{-1}$. С этой целью разрешим относительно x уравнение $(I-\lambda A)x=y$, где $y\in C[0,1]$. Согласно определению оператора A это уравнение имеет вид $x(t)-\lambda\int\limits_0^1 t^2s^3x(s)ds=y(t)$, или $x(t)=\lambda t^2\xi+y(t)$, где $\xi=\int\limits_0^1 s^3x(s)ds$.

Умножив уравнение на t^3 и проинтегрировав, при $\lambda\neq 6$ получим $\xi=\dfrac{6}{6-\lambda}\int\limits_0^1 s^3y(s)ds$, $x(t)=y(t)+\dfrac{6\lambda}{6-\lambda}\int\limits_0^1 t^2s^3y(s)ds$; окончательно $(I-\lambda A)^{-1}=I+\dfrac{6\lambda}{6-\lambda}A$. **1.30**. Если $(a,b)=0$, то при любом λ $A^{-1}y=y+\lambda(a,y)b$; если $(a,b)\neq 0$, то при

$\lambda \neq \dfrac{1}{(a,b)}$ $A^{-1}y = y + \dfrac{\lambda}{1-\lambda(a,b)}(a,y)b$. Для получения этих результатов надо обозначить $\xi = (a,x)$, умножить обе части уравнения $x = \lambda\xi b + y$ слева на a, и решить полученное уравнение относительно ξ. **1.31**. **а**) на всем l_p обратный оператор не существует, так как $R(A) = \{y = (0, y_2, y_3, ...)\} \neq l_p$; **б**) здесь $N(A) = \{0\}$, $R(A) = l_p$, поэтому оператор обратим; здесь изменяются только вторая и третья координаты; это изменение определяется матрицей второго порядка $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; так как $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, то $x = A^{-1}y, x_1 = y_1$, $x_2 = 3y_2 - y_3, x_3 = -5y_2 + 2y_3$, $x_n = y_n$ $(n = 4,5,...)$; **в**) здесь $N(A) = \{0\}$, $R(A) = l_p$, поэтому оператор обратим; $x = A^{-1}y,\ x_k = \dfrac{y_k}{\lambda_k}$ $(k = 1,2,...)$.

1.32. Если существует левый обратный A_l^{-1}, то уравнение $Ax = y$ может иметь не более одного решения и $N(A) = \{\theta\}$. Так как $N(A) \neq \{\theta\}, R(A) = C[0,1]$, то оператор дифференцирования не имеет левого обратного, но имеет правый обратный: $A_r^{-1}y(t) = \int\limits_0^t y(s)ds$. **1.33.** Если существует правый обратный A_r^{-1}, то уравнение $Ax = y$ имеет решение $x = A_r^{-1}y$ при любом $y \in Y$, т.е. $R(A) = Y$. Так как $N(A) = \{\theta\}, R(A) \neq C[0,1]$, то оператор интегрирования не имеет правого обратного, но имеет левый обратный: $A_l^{-1}y = y'$.

2. Линейные функционалы. Сопряженные пространства и сопряженные операторы

2.1. Линейные непрерывные функционалы. Норма линейного функционала. Теорема Хана - Банаха

Определение 2.1. Пусть X – ЛНП. Оператор $f: X \to Y$, где $Y = \mathbf{R}$ или $Y = \mathbb{C}$, называется *функционалом*, при этом значение функционала f на элементе $x \in X$ обозначается $f(x)$.

В этой главе рассматриваются только *линейные функционалы*. Поскольку линейный функционал является частным случаем линейного оператора, для него остаются в силе понятия непрерывности, ограниченности и нормы, а также теоремы из пп. 1.1, 1.2.

Определение 2.2. Пространство непрерывных линейных функционалов $L(X,Y)$, где $Y = \mathbf{R}$ или $Y = \mathbf{C}$, называется *сопряженным* к X и обозначается X^*.

Теорема 2.1. (**Хан – Банах**) Пусть в вещественном ЛНП X задан ограниченный линейный функционал f с $D(f) \subset X$. Тогда существует определенный всюду в X ограниченный линейный функционал $\tilde{f}$ такой, что $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ и $\tilde{f}(x) = f(x)$ для любого $x \in D(f)$.

Рассмотрим также следствия из теоремы Хана - Банаха.

Теорема 2.2 (о достаточном числе функционалов). Пусть X – ЛНП, $x_0 \in X$. Существует $f \in L(X, \mathbf{R})$ такой, что **1**) $\|f\| = 1$; **2**) $f(x_0) = \|x_0\|$.

Доказательство. Рассмотрим $M = \{x : x = tx_0, t \in \mathbf{R}\}$; M – подпространство X. Определим на M функционал $f(x) = t\|x_0\|$. Линейность его очевидна; $|f(x)| = |t| \cdot \|x_0\| = \|tx_0\| = \|x\|$, следовательно, $\|f\| = 1$; если $x = x_0$, то $t = 1$, так что $f(x_0) = \|x_0\|$. Итак, f – линейный ограниченный функционал на M, обладающий нужными свойствами. По теореме Хана - Банаха продолжим его на все пространство с сохранением нормы.

Следствие. Пусть X – ЛНП, $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Существует $f \in L(X, \mathbf{R})$ такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Доказательство. Положим $x_0 = \dfrac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}$. По теореме 2.2 существует $f \in L(X, \mathbf{R})$ такой, что $f(x_0) = 1$, следовательно, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Теорема 2.3. (об аннуляторе) Пусть X – ЛНП, M – его подпространство, $M \neq X$, $y_0 \in X \setminus M$. Тогда существует $f \in L(X, \mathbf{R})$ такой, что 1) $f(x) = 0$ на M; 2) $f(y_0) = 1$; 3) $\|f\| = \frac{1}{d}$, где $d = \rho(y_0, M)$.

Доказательство. Рассмотрим $M_1 = M + y_0$. Докажем, что $y \in M_1$ однозначно представляется в виде $y = x + tx_0$, $x \in M, t \in \mathbf{R}$. Предположим, что $y = x' + t'x_0$, $x' \in M, t' \in \mathbf{R}$ – другое представление. Тогда $x - x' = (t' - t)x_0$. Если $t' - t \neq 0$, то левая часть этого равенства принадлежит M, а правая не принадлежит M, что невозможно. Значит, $t' - t = 0$, $t' = t, x' = x$. Если $t = 0$, то $y \in M$, а если $y = y_0$, то $x = 0, t = 1$.

Полагаем $f(y) = t$. Этим f определен на M_1; линейность его очевидна; $f(x) = 0$ для $x \in M$, $f(y_0) = 1$. Докажем ограниченность f и найдем его норму.

$$|f(y)| = |t| = \frac{|t| \cdot \|y\|}{\|y\|} = \frac{|t| \cdot \|y\|}{\|x + ty_0\|} = \frac{\|y\|}{\left\|\frac{x}{t} + y_0\right\|} = \frac{\|y\|}{\left\|y_0 - \left(-\frac{x}{t}\right)\right\|} \leq \frac{\|y\|}{d},$$

что доказывает ограниченность f и оценку $\|f\| \leq \frac{1}{d}$.

Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_0\| = d$. Тогда $1 = |0 - 1| = |f(x_n) - f(y_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_n - y_0\| \to \|f\| d$, откуда следует, что $1 \leq \|f\| d$, т. е. $\|f\| \geq \frac{1}{d}$. Вместе с ранее доказанным это означает, что $\|f\| = \frac{1}{d}$. Итак, построен функционал на M_1, обладающий нужными свойствами. По теореме Хана - Банаха продолжим его на все пространство с сохранением нормы.

Теорема 2.4 (Рисс). Пусть H – гильбертово пространство и f – линейный непрерывный функционал на нем. Существует $q \in H$ такой, что для любого $x \in H$, $f(x) = (x, q)$ причем $\|f\| = \|q\|_H$.

Доказательство. Линейность скалярного произведения следует из его аксиом, ограниченность – из неравенства Коши - Буняковского: $|(x, q)| \leq \|q\|_H \|x\|_H$.

Покажем, что любой ограниченный функционал имеет вид $f(x)=(x,q)$.

Пусть $f \in L\left(H,\mathbf{R}\right), f \neq 0, N(f) \doteq \left\{x \in H : f(x)=0\right\}$ – ядро функционала f. $N(f)$ – подпространство H, причем $N(f) \neq H$. Фиксируем произвольный $x_0 \in H \setminus N(f)$. По теореме о разложении гильбертова пространства в ортогональную сумму подпространств $x_0 = x_0' + x''$, где $x_0' \in N(f)$, $x_0'' \perp N(f)$; следовательно, $f\left(x_0''\right) \neq 0$. Положим $y_0 = \dfrac{x_0''}{f(x_0'')}$. Тогда $f(y_0)=1$. Пусть x пробегает все H, $z = x - f(x)\cdot y_0$. Так как $f(z)=f(x)-f(x)\cdot 1=0$, то $z \in N(f)$, т.е. $x = z + f(x)y_0$ – представление x согласно упомянутой выше теореме о разложении гильбертова пространства в ортогональную сумму подпространств. Полагаем $q=\dfrac{y_0}{\left\|y_0\right\|^2}$. Тогда

$$(x,q)=x\cdot\frac{y_0}{\left\|y_0\right\|^2}=\left(z+f(x)y_0\right)\cdot\frac{y_0}{\left\|y_0\right\|^2}=z\cdot\frac{y_0}{\left\|y_0\right\|^2}+f(x)\cdot y_0\cdot\frac{y_0}{\left\|y_0\right\|^2}=f(x),$$

причем $\|q\|=\dfrac{\left\|y_0\right\|}{\left\|y_0\right\|^2}=\dfrac{1}{\left\|y_0\right\|}=\dfrac{\left|f\left(x_0''\right)\right|}{\left\|x_0''\right\|}$, т.е. $f\left(x_0''\right)=\|q\|\cdot\left\|x_0''\right\|$. Это значит, что $\|f\|=\|q\|_H$. Итак, равенства $f(x)=(x,q)$ доказаны.

Пример 2.1. Рассмотрим линейный функционал $f(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k)$ на пространстве $C\left[a,b\right]$ $\left(a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le b\right)$. Сначала докажем ограниченность этого функционала и получим для нормы оценку сверху

$$\left|f(x)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|c_k\right|\left|x(t_k)\right| \le \max_{t\in[a,b]}\left|x(t)\right|\sum_{k=1}^{n}\left|c_k\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|c_k\right|\cdot\|x\|.$$

Значит, функционал f ограничен и $\left\|f(x)\right\| \le \sum_{k=1}^{n}\left|c_k\right|$.

Определим непрерывную функцию следующим образом: $\hat{x}(t) = siqn\, c_k$, $t = t_k, k = 1, 2,\ldots, n$; в остальных точках кусочно-линейна, так, чтобы $\left|x(t)\right| \le 1$.

Легко видеть, что $\left\|\hat{x}(t)\right\| = 1$. По теореме 1.4

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1}\left|f(x)\right| \ge \left|f(\hat{x})\right| = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot siqn\, c_k = \sum_{k=1}^{n}\left|c_k\right| \Rightarrow \|f\| \ge \sum_{k=1}^{n}\left|c_k\right|.$$

Значит, $\|f\| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|$.

Пример 2.2. Пусть теперь $f(x) = \int_a^b q(t)x(t)dt$, $q \in C[a,b]$. Очевидно, f – линейный функционал на $C[a,b]$. Из простейших свойств интеграла имеем $|f(x)| \le \int_a^b |q(t)||x(t)|dt \le \int_a^b |q(t)|dt \cdot \|x\|$, следовательно, функционал f ограничен и $\|f\| \le \int_a^b |q(t)|dt$.

Можно также доказать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует функция $\hat{x}(t)$ из $C[a,b]$ такая, что $\|\hat{x}\| = 1$ и

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \ge |f(\hat{x})| = \int_a^b q(t)\hat{x}(t)dt \ge \int_a^b |q(t)|dt - \varepsilon.$$

Тогда в силу произвольности ε имеем $\|f\| \ge \int_a^b |q(t)|dt$, и тогда $\|f\| = \int_a^b |q(t)|dt$.

Пример 2.3. Докажем, что функционал $f(x) = \sum_{k=1}^{m} x_k$ ($m \in \mathbf{N}$ – фиксированное) является линейным непрерывным на банаховом пространстве $X = l_2$; найдите $\|f\|$.

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|f(x)| = \sum_{k=1}^{m} x_k \le \sum_{k=1}^{m} |x_k| \le \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{m} \le \sqrt{m}\,\|x\|,$$

значит, f ограничен и $\|f\| \le \sqrt{m}$; для доказательства противоположного неравенства возьмем $\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\underbrace{1,1,...,1}_{m}, 0,... \right)$; тогда $\|\hat{x}\| = 1$, $f(\hat{x}) = \frac{m}{\sqrt{m}} = \sqrt{m}$, откуда согласно теореме 1.4 $\|f\| \ge \sqrt{m}$, а в итоге $\|f\| = \sqrt{m}$.

Пример 2.4. Рассмотрим линейный функционал $f(x) \doteq x'(0)$: а) на банаховом пространстве $C[0,1]$; б) на банаховом пространстве $C^{(1)}[0,1]$.

а) Здесь $D(f)$ – всюду плотное в $C[0,1]$ множество непрерывно дифференцируемых функций; функционал f не является непрерывным, так как он неограниченный: пусть $x_n(t) = \sin nt$; тогда $\|x_n\| = 1$, однако $f(x_n) = x_n'(0) = n \to \infty$;

б) в этом случае $D(f) = C^{(1)}[0,1]$;

$$\left|f(x)\right| = \left|x'(0)\right| \le \max_{t\in[0,1]}\left|x'(t)\right| \le \max_{t\in[0,1]}\left|x(t)\right| + \max_{t\in[0,1]}\left|x'(t)\right| = \|x\|_{C^{(1)}[0,1]} \Rightarrow f$$

ограничен, $\|f\| \le 1$; положив $\hat{x}(t) \equiv t$, получим согласно теореме 1.4 $\|f\| \ge f(x) = x'(0) = 1$, откуда $\|f\| = 1$.

Задачи для самостоятельного изучения

Задача 2.1. Докажите, что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$ являются линейными непрерывными; найдите их нормы.

а) $f(x) \doteq x(0)$;

б) $f(x) \doteq x(-1) - 2x(0) + x(1)$;

в) $f(x) \doteq \dfrac{x(-\varepsilon) - 2x(0) + x(\varepsilon)}{2\varepsilon} \quad (0 < \varepsilon < 1)$;

г) $f(x) \doteq \int_0^1 x(t)dt - x(-1)$;

д) $f(x) \doteq \int_{-1}^1 x(t)dt$;

е) $f(x) \doteq \int_{-1}^1 x(t)dt - x(0)$;

ж) $f(x) \doteq \int_{-1}^0 x(t)dt - \int_0^1 x(t)dt$;

з) $f(x) \doteq \int_{-1}^1 tx(t)dt$;

и) $f(x) \doteq \int_{-1}^1 t^2 x(t)dt$.

Задача 2.2. Докажите, что функционал $f(x) = \int_0^1 x(\sqrt[m]{t})dt$ в пространстве $C[0,1]$ является линейным непрерывным, найдите его норму.

Задача 2.3. Докажите, что функционал $f(x) = \int_0^1 tx(t)dt$ является линейным непрерывным на банаховом пространстве $X = C^{(1)}[-1,1]$ и найдите его норму $\|f\|$.

Задача 2.4. Докажите, что функционал $f(x)=\sum_{k=1}^{m} x_k$ ($m \in \mathbf{N}$ – фиксированное число) является линейным непрерывным на банаховом пространстве X; найдите $\|f\|$, если: а) $X=l_1$; б) $X=l_\infty$.

Задача 2.5. Докажите, что функционал $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ является линейным непрерывным на банаховом пространстве X; найдите $\|f\|$, если: **а)** $X=l_1$; **б)** $X=l_2$.

Задача 2.6. Докажите, что функционал $f(x)=\lim_{k\to\infty} x_k$ является линейным непрерывным на банаховым пространстве c; найдите $\|f\|$.

Задача 2.7. Пусть $y=(y_1, y_2, ...) \in l_q$ $\left(q \in [1, +\infty)\right)$, $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Докажите: f – линейный непрерывный функционал на l_p, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; оцените сверху его норму.

2.2. Сопряженный оператор. Самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве

Пусть X, Y – ЛНП, $A: X \to Y$ – линейный всюду определенный ($D(A)=X$) оператор, $f \in Y^*$, $x \in X$. Тогда $Ax \in Y$ и можно говорить о числе $f(Ax)$, поставленном в соответствие элементу $x: q(x) \doteq f(Ax)$; очевидно, q – линейный функционал на X. Если A – ограниченный оператор, то q – ограниченный линейный функционал:

$$|q(x)| = |f(Ax)| \le \|f\| \cdot \|Ax\| \le \|f\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|, \tag{2.1}$$

т.е. $q \in X^*$. Таким образом, каждому $f \in Y^*$ ставится в соответствие $q \in X^*$, т.е. имеем оператор $A^*: Y^* \to X^*$, определяемый равенством

$$\left(A^* f\right)(x) = q(x) = f(Ax) . \tag{2.2}$$

Определение 2.3. Оператор A^*, определяемый равенством (2.2), называется *сопряженным* оператору A.

Пример 2.5. Докажем, что A^* – линейный оператор. Из (2.1) следует, что если $A \in L(X,Y)$, то $A^* \in L(X^*,Y^*)$, причем $\|A^*\| \le \|A\|$. На самом деле здесь имеет место равенство. Из теоремы 1.4 о норме оператора и свойства точной верхней грани следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $x_\varepsilon \in X$ такой, что $\|x_\varepsilon\| = 1$, $\|Ax_\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon$. По теореме 2.2 о достаточном числе функционалов найдется $\hat{f} \in Y^*$ такой, что $\|\hat{f}\| = 1$, $\hat{f}(Ax_\varepsilon) = \|Ax_\varepsilon\|$.

Учитывая эти соотношения, получаем

$$\|A^*\| = \|A^*\| \cdot \|\hat{f}\| \ge \|A^* \hat{f}\| = \|A^* \hat{f}\| \cdot \|x_\varepsilon\| \ge \left\|\left(A^* \hat{f}\right)(x_\varepsilon)\right\| =$$

$$= \left|\hat{f}(Ax_\varepsilon)\right| = \|Ax_\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\|A^*\| \ge \|A\|$, а с учетом неравенства $\|A^*\| \le \|A\|$ получим $\|A^*\| = \|A\|$.

Пример 2.6. Докажем, что 1) $(A+B)^* = A^* + B^*$; 2) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.

1) В силу линейности A, B и f имеем

$$(A+B)^* f(x) = f(A+B)x = f(Ax+Bx) = f(Ax) + f(Bx) =$$

$$= \left(A^* f\right)(x) + \left(B^* f\right)(x) = \left(A^* + B^*\right) f(x) \Rightarrow (A+B)^* = A^* + B^*;$$

2) пусть пространства X, Y – комплексные; тогда

$$(\lambda A)^* f(x) = f(\lambda Ax) = \overline{\lambda}\left(A^* f\right)(x) \Rightarrow (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*.$$

Пример 2.7. Докажем, что если $Y = X$, то $(AB)^* = B^* A^*$.

$$(AB)^* f(x) = f(ABx) = f\left(A(Bx)\right) = \left(A^* f\right)(Bx) =$$

$$= \left(B^*\left(A^* f\right)\right)(x) = \left(B^* A^* f\right)(x) \Rightarrow (AB)^* = B^* A^*.$$

Пусть H – произвольное гильбертово пространство. В силу теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала, определение оператора, сопряженного ограниченному оператору A, может быть переформулировано так: $\left(A^* f\right)(x) = \left(x, A^* f\right) = (Ax, f) = f(Ax)$.

Определение 2.4. Оператор $A \in L(H)$, для которого выполняется равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$, называется *самосопряженным* оператором.

Множество самосопряженных операторов обозначим $S(H)$.

Пример 2.8. Покажем, что если $A, B \in S(H)$, то $AB \in S(H)$ тогда и только тогда, когда A и B перестановочны: $AB = BA$.

Пусть $A, B \in S(H)$, $x, y \in H$ и $AB = BA$; тогда

$$(ABx, y) = (Bx, Ay) = (x, BAy) = (x, ABy), \text{ т.е. } AB \in S(H).$$

Пусть наоборот, известно, что $AB \in S(H)$, $x, y \in H$; тогда из равенств $(ABx, y) = (x, BAy) = (x, ABy)$ следует, что $\left(x, (BA - AB)y\right) = 0$; из того, что это равенство верно для всех $x \in H$, следует, что $(BA - AB)y = 0$; отсюда, ввиду произвольности $y \in H$, получаем, что $BA - AB = 0$, т.е. перестановочность A и B.

Пример 2.9. Пусть $A \in L(\mathbb{C}^n)$ в некотором базисе описывается матрицей A. Докажите, что тогда сопряженный оператор имеет в этом базисе матрицу $A^* = \overline{A^T}$, следовательно такой оператор будет самосопряженным, если его матрица эрмитово сопряженная: $A = \overline{A^T}$.

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right)\overline{y_i} = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\overline{y_i} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ik}} y_i} = (x, A^* y),$$

где $A^* y = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}} y_k = \sum_{k=1}^{n} a^*_{ik} y_k$, $a^*_{ik} = \overline{a_{ki}}$ или $A^* = \overline{A^T}$; оператор будет самосопряженным, если $\overline{A^T} = A$.

Пусть $CL_2[a,b] = \left\{ x(t) \in C[a,b]; \|x\|_{L_2} = \left[\int_a^b |x(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}$,

$\mathrm{Q} = \left\{(x, y) / a \le x \le b, a \le y \le b\right\}$.

Теорема 2.5. Интегральный оператор $A: CL_2 \to CL_2$ с непрерывным вещественным ядром $K(t,\tau) \in C(\mathrm{Q})$ имеет сопряженный оператор $A^*: CL_2 \to CL_2$, который является интегральным оператором с ядром $K^*(t,\tau) = K(\tau, t)$, т.е. $A^* z = \int_a^b K(\tau, t) z(\tau) d\tau$, где $z(t)$ – комплексно-значная функция из CL_2.

Для того, чтобы оператор A был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы ядро $K(t,\tau)$ было симметричным, т.е. обладало свойством $K(t,\tau) = K(\tau, t)$.

Доказательство. Пользуясь соответствующими определениями и теоремой о перестановке порядка интегрирования, получим при любых $y, z \in C[a,b]$

$$(Ay,z)=\int_a^b (Ay)(t)\overline{z(t)}dt=\int_a^b\left(\int_a^b K(t,\tau)y(\tau)d\tau\right)\overline{z(t)}dt=$$
$$=\int_a^b y(\tau)d\tau\int_a^b K(t,\tau)\overline{z(t)}dt=\int_a^b y(\tau)\overline{(A^*z)\tau}d\tau=(y,A^*z).$$

Таким образом, сопряженный оператор A^* существует и представляется по формуле $A^*z=\int_a^b K(\tau,t)z(\tau)d\tau$.

Необходимость. Пусть оператор A самосопряжен: $A=A^*$ (т.е. $Ay=A^*y$, $\forall y\in C[a,b]$). Воспользуемся представлениями $Ay=\int_a^b K(t,\tau)y(\tau)d\tau$, $A^*y=\int_a^b K(\tau,t)y(\tau)d\tau$. Вычитая одно из другого, получаем $\int_a^b\left[K(t,\tau)-K(\tau,t)\right]y(\tau)d\tau=0$, $\forall y\in C[a,b]$.

Можно доказать, что для непрерывного ядра $K(t,\tau)$ справедливо равенство $H(t,\tau)=K(t,\tau)-K(\tau,t)\equiv 0$.

Достаточность. Если ядро симметрично, то имеем, очевидно, $Ay=\int_a^b K(t,\tau)y(\tau)d\tau=\int_a^b K(\tau,t)y(\tau)d\tau=A^*y$, $\forall y\in C[a,b]$. Теорема доказана.

Мы видим, что для интегрального оператора A с вещественным ядром $K(t,\tau)$ ядро сопряженного оператора совпадает с транспонированным ядром: $K^*(t,\tau)=K^T(t,\tau)=K(\tau,t)$.

В общем случае, когда $K(t,\tau)$ комплексное, ядро $K^*(t,\tau)$ сопряженного оператора A^* выражается формулой $K^*(t,\tau)=\overline{K(\tau,t)}$ (см. задачу 2.8.) (т.е. наряду с транспонированием производится переход к комплексно сопряженными величинами). Комплексное ядро $K(t,\tau)$, удовлетворяющее условию $K^*(t,\tau)=\overline{K(\tau,t)}$, называется *эрмитово-симметричным*.

Задачи для самостоятельного изучения

Задача 2.8. Докажите, что оператор, сопряженный линейному интегральному оператору Фредгольма с ядром $K(t,s)$ в комплексном пространстве CL_2 , есть линейный оператор Фредгольма с ядром

$K^*(t,s)=\overline{K(s,t)}$, и значит, самосопряженный оператор обладает свойством $K(t,s)=\overline{K(s,t)}$.

Задача 2.9. Покажите, что если $A\in S(H)$, то квадратичная форма (Ax,x) принимает вещественные значения.

Ответы и указания к задачам

2.1.а) Линейность функционала следует из линейности значения функции в точке:

$$f(\alpha x+\beta y)=(\alpha x+\beta y)(0)=\alpha x(0)+\beta y(0)=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

Докажем ограниченность функционала, которая эквивалентна его непрерывности $|f(x)|=|x(0)|\le \max\limits_{t\in C[-1,1]}|x(t)|=\|x\| \Rightarrow f$ ограничен, $\|f\|\le 1$; пусть $\hat{x}(t)\equiv 1$, так , что $\|x\|=1$; по теореме1.4 $\|f\|\ge |f(\hat{x})|=\hat{x}(0)=1$; отсюда $\|f\|\ge 1$, и значит, $\|f\|=1$; **б)** линейность функционала столь же тривиальна, как и в а);

$$|f(x)|=|x(-1)-2x(0)+x(1)|\le|x(-1)|+2|x(0)|+|x(1)|\le 4\max_{t\in C[-1,1]}|x(t)|=4\|x\|;$$

этим доказана ограниченность функционала f и оценка $\|f\|\le 4$. Для доказательства противоположного неравенства рассмотрим кусочно-линейную функцию $\hat{x}(t)=2|t|-1$ (знак функции в точках $-1, 0, 1$ совпадает со знаком коэффициента); тогда $\|\hat{x}\|=1,\ f(\hat{x})=4$; по теореме 1.4 $\|f\|\ge 4$, и значит, $\|f\|=4$; **в)** $\|f\|=\dfrac{2}{\varepsilon}$, $\hat{x}(t)=\dfrac{1}{2\varepsilon}\left(2\left|\dfrac{t}{\varepsilon}\right|-1\right)$ для $\|t\|\le\varepsilon$; $\hat{x}(t)=1$ для $|t|>\varepsilon$;

г) линейность функционала следует из линейности обоих слагаемых; ограниченность – из нижеследующего:

$$|f(x)|=\left|\int_0^1 x(t)dt-x(-1)\right|\le\int_0^1|x(t)|dt+|x(-1)|\le 2\|x\|;$$

отсюда также следует, что $\|f\|\le 2$. Для доказательства противоположного неравенства рассмотрим кусочно-линейную функцию $\hat{x}(t)=2t+1$ для $-1\le t\le 0$, $\hat{x}(t)=1$ для $0<t\le 1$; очевидно, $\hat{x}\in C[-1,1]$, $\|\hat{x}\|=1$, $f(\hat{x})=1-(-1)=2$; по теореме 1.4 $\|f\|\ge 2$, и значит, $\|f\|=2$; **д)** линейность функционала следует из линейности интеграла; его ограниченность – из следующей цепочки соотношений

$$|f(x)|=\left|\int_{-1}^1 x(t)dt\right|\le\int_{-1}^1|x(t)|dt\le\max_{t\in[-1,1]}|x(t)|\int_{-1}^1 dt=\|x\|\cdot\int_{-1}^1 dt=2\|x\|,$$

отсюда также следует, что $\|f\| \le 2$. Противоположное неравенство доказываем положив $\hat{x}(t) \equiv 1$; следовательно, $\|f\| = 2$; **е)** $\|f\| = 3$; остановимся на доказательстве неравенства $\|f\| \ge 3$; полагаем $\hat{x}_n(t) = 1$ для $|t| > \dfrac{1}{n}$, $\hat{x}_n(t) = 2n|t| - 1$ для $|t| \le \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$; очевидно,

$$\hat{x} \in C[-1,1],\ \|\hat{x}\| = 1,\ f(\hat{x}) = 2\left(\int_0^{\frac{1}{n}} (2nt-1)dt + \int_{\frac{1}{n}}^{1} dt\right) - (-1) = 3 - \frac{2}{n},$$

что ввиду произвольности $n \in \mathbf{N}$ означает согласно теореме 1.4, что $\|f\| \ge 3$; **ж)** $\|f\| = 2$; здесь $\hat{x}_n(t) = \begin{cases} 1\,, t < -1/n, \\ -nt,\ |t| \le 1/n, \\ -1\,, t > 1/n; \end{cases}$ тогда $f(\hat{x}_n) = 2 - \dfrac{2}{n}$; **з)** $\|f\| = 1$; здесь надо взять $\hat{x}_n(t) = \begin{cases} -1\,, t < -1/n, \\ nt,\ |t| \le 1/n, \\ 1,\ t > 1/n; \end{cases}$, тогда $f(\hat{x}_n) = 1 - \dfrac{1}{n^2}$; **и)** $\|f\| = \dfrac{2}{3}$; здесь можно взять $\hat{x}(t) \equiv 1$.

2.2. Линейность функционала следует из линейности интеграла $f(x) = \int_0^1 x(\sqrt[m]{t})dt = m\int_0^1 s^{m-1}x(s)ds,\ \|f\| = 1;\ \hat{x}(t) \equiv 1$.

2.3. Линейность функционала следует из линейности интеграла. $\|f\| = \dfrac{1}{2}$;

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 tx(t)dt\right| \le \int_0^1 t\,|x(t)|\,dt \le \frac{1}{2}\|x\|_{C[-1,1]} \le \frac{1}{2}\left(\|x\|_{C[-1,1]} + \|x'\|_{C[-1,1]}\right) = \frac{1}{2}\|x\|_{C^{(1)}[-1,1]}$$

следовательно, функционал f ограничен, и $\|f\| \le \dfrac{1}{2}$; противоположное неравенство доказывается согласно теореме 1.4 с помощью функции $\hat{x}(t) \equiv 1$.

2.4. Линейность функционалов следует из линейности суммы:

$$f(\alpha x + \beta y) = \sum_{k=1}^{m} \alpha x_k + \beta y_k = \alpha \sum_{k=1}^{m} x_k + \beta \sum_{k=1}^{m} y_k = \alpha f(x) + \beta f(y);$$

докажем ограниченность функционалов во всех пространствах и найдем их нормы. **а)** $\|f\|=1$; $|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{m}x_k\right|\le\sum_{k=1}^{m}|x_k|\le\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|=\|x\|$; следовательно, функционал f ограничен и $\|f\|\le 1$; противоположное неравенство получается с помощью теоремы 1.4 и $\hat{x}=(1,0,0,\ldots)$; **б)** $\|f\|=m$, так как $|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{m}x_k\right|\le\sum_{k=1}^{m}|x_k|\le\sup_{k\ge1}|x_k|\left|\sum_{k=1}^{m}1=m\|x\|\right.\Rightarrow f$ ограничен, $\|f\|\le m$; противоположное неравенство получается с помощью теоремы 1.4 и элемента $\hat{x}=\left(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m},0,\ldots\right)$. **2.5.** Линейность функционала во всех пространствах следует из того, что линейная комбинация абсолютно сходящихся рядов есть абсолютно сходящийся ряд. Докажем ограниченность функционалов и найдем их норму.

а) $\|f\|=1$, так как ограничен $|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k|}{k}\le\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|=\|x\|\Rightarrow f$, $\|f\|\le 1$; противоположное неравенство получается с помощью теоремы 1.4 и элемента $\hat{x}=(1,0,0,\ldots)$; **б)** $\|f\|=\frac{\pi}{\sqrt{6}}$, так как $|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k|}{k}\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac12}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{\frac12}=\alpha\|x\|$, где $\alpha^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$; это означает, что функционал f ограничен и $\|f\|\le\alpha$; для доказательства противоположного неравенства возьмем $\hat{x}=\frac{1}{\alpha}\left(1,\frac12,\ldots,\frac1k,\ldots\right)$; тогда $\|\hat{x}\|=1$, $f(\hat{x})=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac1k\cdot\frac1k=\alpha$; согласно теореме 1.4 $\|f\|\ge\alpha$, а в итоге $\|f\|=\alpha=\frac{\pi}{\sqrt{6}}$. **2.6.** Пусть $x,y\in c$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$; тогда из свойств предела числовой последовательности имеем линейность данного функционала:

$$f(\alpha x+\beta y)=\lim_{k\to\infty}(\alpha x_k+\beta y_k)=\alpha\lim_{k\to\infty}x_k+\beta\lim_{k\to\infty}y_k=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

Далее, $|f(x)|=\lim_{k\to\infty}|x_k|\le\sup_{k\ge1}|x_k|=\|x\|$, что означает ограниченность f и справедливость оценки $\|f\|\le 1$. Положим $\hat{x}=(1,1,\ldots)$, так что $\hat{x}\in c$, $\|\hat{x}\|=1$, $f(\hat{x})=1$; согласно теореме 1.4 получаем, что $\|f\|\ge 1$, а в итоге

$\|f\|=1$. **2.7.** Линейность функционала во всех пространствах следует из того, что линейная комбинация абсолютно сходящихся рядов есть абсолютно сходящийся ряд. Докажем его ограниченность

$$|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}|x_k||y_k|\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|y\|_{l_q}\cdot\|x\|_{l_p}\Rightarrow f$$

ограничен, $\|f\|\le\|y\|_{l_q}$.

2.8. $(Ax,y)=(x,A^*y)$

$$(Ax,y)=\int_a^b(Ax)(t)\overline{y(t)}dt=\int_a^b\left(\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right)\overline{y(t)}dt=$$

$$=\int_a^b\left(\overline{\int_a^b\overline{K(t,s)}y(t)dt}\right)x(s)ds=\int_a^b x(t)\left(\overline{\int_a^b\overline{K(s,t)}y(s)ds}\right)dt=(x,A^*y),$$

где $\left(A^*y\right)(t)=\int_a^b\overline{K(s,t)}y(s)ds$. Таким образом, ядро сопряженного оператора определяется равенством $K^*(t,s)=\overline{K(s,t)}$. Линейный интегральный оператор будет самосопряженным, если его ядро обладает свойством $K(t,s)=\overline{K(s,t)}$. **2.9.** С одной стороны, из определения скалярного произведения $(Ax,x)=\overline{(x,Ax)}$, с другой – из определения самосопряженного оператора, $(Ax,x)=(x,Ax)$; в итоге $\overline{(x,Ax)}=(x,Ax)$, что и означает вещественность этой квадратичной формы.

3. Вполне непрерывные операторы

3.1. Понятие компактного множества. Теорема Арцела

Определение 3.1. Множество M линейного нормированного пространства X называется компактным, если из каждой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_k \subset M$.

Если X банахово пространство (полное метрическое пространство), то указанная фундаментальная подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_k \subset M$, вследствие полноты X, сходится к некоторому элементу $x_0 \in X$, однако не обязательно $x_0 \in M$.

Пусть $\overline{G}$ – замкнутая ограниченная область в евклидовом пространстве E^n. Рассмотрим пространство $C(\overline{G})$ непрерывных функций на множестве $\overline{G}$. Пусть $M \subset C(\overline{G})$ - некоторое множество функций из $C(\overline{G})$. Какие условия обеспечивают компактность множества M? Этот вопрос решается теоремой Арцела.

Определение 3.2. Функции множества M называются равномерно ограниченными, если существует число $c > 0$ (общее для всех функций из множества M) такое, что для любой функции $x = x(t) \in M$: $|x(t)| \le c$ $(t \in \overline{G})$ (равномерная ограниченность функций множества M означает ограниченность множества M в пространстве $C(\overline{G})$).

Определение 3.3. Функции из множества M называются равностепенно непрерывными, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой функции $x = x(t) \in M$, для всех $t', t'' \in \overline{G}$: $\|t' - t''\|_{E^n} < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |x(t') - x(t'')| < \varepsilon$.

Теорема 3.1 (Арцел). Для того чтобы множество $M \subset C(\overline{G})$ функций было компактным, необходимо и достаточно, чтобы функции множества M были равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными.

Пример 3.1. В пространстве $C[a,b]$ рассмотрим множество M функций $x = x(t)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ и таких, что $x(a) = x_0$ и $|x(t)| \le m$, т.е. $M = \{x = x(t) \in C^1[a,b] : x(a) = x_0, |x'(t)| \le m\}$. Покажем с помощью теоремы Арцела, что M компактно. Всякая функция $x = x(t) \in M$ представима в виде

$$x(t) = x_0 + \int_a^t x'(s)\,ds.$$

Отсюда

$$\left|x(t)\right| = \left|x_0 + \int_a^t x'(s)\,ds\right| \le |x_0| + \int_a^t |x'(s)|\,ds \le |x_0| + \int_a^t m\,ds = |x_0| + m(t-a) \le |x_0| + m(b-a),$$

т.е. функции из множества M равномерно ограничены. Далее, исходя из неравенства $\left|x(t') - x(t'')\right| < \varepsilon$, получим

$$\left|x(t') - x(t'')\right| = \left|\left(x_0 + \int_a^{t'} x'(s)\,ds\right) - \left(x_0 + \int_a^{t''} x'(s)\,ds\right)\right| = \left|\int_{t'}^{t''} x'(s)\,ds\right| \le \int_{t'}^{t''} |x'(s)|\,ds \le$$

$$\le m\left|t' - t''\right| < \varepsilon,$$

т.е. $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{m} > 0$, что доказывает равномерную ограниченность функций из множества M.

3.2. Линейные вполне непрерывные операторы. Основные свойства

Операторы в конечномерном пространстве обладают рядом свойств, которые не переносятся на произвольные ограниченные операторы в бесконечномерных пространствах. В данном пункте будет изучен класс операторов, обладающих некоторыми свойствами операторов в конечномерных пространствах. Особый интерес к этому классу операторов связан также с тем, что в него входят многие интегральные операторы, и это позволяет получить более детальную информацию об интегральных уравнениях.

Определение 3.4. Пусть X, Y – банаховы линейные пространства. Линейный оператор $A: X \to Y$ называется вполне непрерывным (компактным), если он замкнутый единичный шар $S_1(\theta) = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ пространства X переводит в компактное множество пространства Y.

Множество всех вполне непрерывных операторов, действующих из X в Y, будем обозначать через $\sigma(X, Y)$.

Напомним, что оператор $A: X \to Y$ является ограниченным (непрерывным), если он ограниченное множество переводит в ограниченное множество. Отличие класса компактных операторов от произвольных ограниченных операторов основано на том, что ограниченные множества в бесконечномерных пространствах могут не быть компактными.

Приведем примеры вполне непрерывных линейных операторов.

Пример 3.2. Если пространства X, Y конечномерны, то любой линейный оператор ограничен, значит, он переводит ограниченное множество в ограниченное множество. Но в конечномерном линейном пространстве любое ограниченное множество M компактно, так как из каждой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность $\left\{x_{n_k}\right\}_k \subset M$. Таким образом, в конечномерных пространствах все линейные операторы вполне непрерывны.

Пример 3.3. Пусть X, Y –произвольные банаховы линейные пространства. Линейный оператор $A: X \to Y$ называется оператором конечного ранга, если его образ $R(A)$ является конечномерным подпространством. Покажем, что оператор конечного ранга является вполне непрерывным. Так как множество $S_1(\theta)=\{x\in X:\|x\|\le 1\}$ является ограниченным, то множество $A(S_1(\theta))\subset Y$ (образ замкнутого единичного шара в результате действия линейного оператора A) также ограничено. Так как образ $R(A)$ является конечномерным, то множество $A(S_1(\theta))\subset Y$ является компактным.

В частности, если пространство Y конечномерно, то любой ограниченный (непрерывный) линейный оператор компактен. Отсюда следует, что любой линейный непрерывный функционал $f:X\to P$ является вполне непрерывным линейным оператором.

Пример 3.4. В пространстве $X=C[0,1]$ рассмотрим линейный интегральный оператор с вырожденным ядром

$$Ax(t)=\int_0^1\sum_{k=1}^n a_k(t)b_k(s)x(s)ds=\sum_{k=1}^n a_k(t)\int_0^1 b_k(s)x(s)ds=\sum_{k=1}^n c_k a_k(t),$$

где a_k, $b_k\in C[0,1]$, $c_k=\int_0^1 b_k(s)x(s)ds\ \ (k=1,2,...,n)$.

Образ $R(A)$ принадлежит конечномерному подпространству L ($\dim L=n$), порожденному функциями $a_1(t),a_2(t),...,a_n(t)$ [так как образ $Ax(t)$ функции $x(t)$ разложен по функциям $a_1(t),a_2(t),...,a_n(t)$]. Значит, данный оператор является оператором конечного ранга, а значит, и вполне непрерывным.

Пример 3.5. Для нулевого оператора образом является одна точка, значит, он компактен.

Примером линейного непрерывного оператора, который не является вполне непрерывным, является единичный оператор $I:X\to X$, $Ix=x$ в бесконечномерном пространстве X. Оператор $I:X\to X$ переводит единичный шар $S_1(\theta)=\{x\in X:\|x\|\le 1\}$ в себя, который не является компактным множеством в бесконечномерном пространстве. Таким образом, единичный оператор $I:X\to X$ является вполне непрерывным только в случае конечномерного пространства X.

Сформулируем основные утверждения о линейных вполне непрерывных операторах.

1. Линейный вполне непрерывный оператор $A:X\to Y$ переводит любое ограниченное множество пространства X во множество, компактное в пространстве Y.
2. Множество $\sigma(X,Y)$ линейных вполне непрерывных операторов является подпространством пространства $L(X,Y)$.
3. Если хотя бы одно из пространств X,Y является конечномерным, то

линейный оператор $A:X\to Y$ является вполне непрерывным линейным оператором, т.е. $\sigma(X,Y)=L(X,Y)$.

4. Если последовательность $\{A_n\}$ вполне непрерывных линейных операторов сходится по норме к линейному оператору A, то оператор A является вполне непрерывным оператором.

5. Если линейные операторы $A,B:X\to Y$ вполне непрерывны, то оператор $A+B$ также является вполне непрерывным линейным оператором.

6. Линейный оператор $A:X\to Y$ является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда сопряженный линейный оператор является вполне непрерывным.

3.3. Примеры линейных вполне непрерывных операторов в пространствах последовательностей

Пример 3.6. В пространстве l_2 рассмотрим линейный оператор $A:l_2\to l_2$, определенный формулой

$$Ax=y=(y_1,y_2,...),\ y_k=\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}x_j\ \ (k=1,2,...),$$

где $x=(x_1,x_2,...)\in l_2$, $(a_{kj})_{k,j=1}^{\infty}$ - бесконечная матрица, для которой числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}|^2$ является сходящимся. Оператор такого вида называется матричным оператором Гильберта - Шмидта.

Покажем, что оператор является вполне непрерывным. В l_2 норма $x=(x_1,x_2,...)$ имеет вид $\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/2}$. Во-первых, оператор является ограниченным, так как $\|Ax\|\le\sqrt{c}\cdot\|x\|\le\sqrt{c}$ при $\|x\|\le 1$, где $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}|^2=c$.

Далее, обозначим через $A_n:l_2\to l_2$ оператор, переводящий вектор $x=(x_1,x_2,...)\in l_2$ в вектор $A_nx=(y_1,y_2,...,y_n,0,0,...)\in l_2$. Область значений каждого оператора A_n конечномерна, следовательно, каждый оператор A_n вполне непрерывен (свойство 3 вполне непрерывного оператора). Так как $\|A_n-A\|^2\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}|^2\right)\to 0$ при $n\to\infty$, то последовательность $\{A_n\}$ вполне непрерывных операторов сходится по норме к оператору A, что означает компактность линейного оператора A.

Пример 3.7. Рассмотрим линейный оператор $A:l_1\to l_2$, определенный формулой $Ax=y=\left(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},...,\frac{x_n}{n},...\right)$, где $x=(x_1,x_2,...)\in l_1,\|x\|=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|<+\infty$.

Покажем, что данный оператор является компактным оператором. Заметим сначала, что из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2$, т.е. если $x \in l_1$, то $x \in l_2$. В l_2 норма элемента $x=(x_1,x_2,...)$ имеет вид $\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/2}$.

Согласно неравенству Коши - Буняковского имеем

$$\|Ax\|^2=\|y\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x_k}{k}\right|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot|x_k|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)=\frac{\pi^2}{6}\cdot\|x\|^2,$$

где $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Таким образом, $\|Ax\|\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}\|x\|\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ при $\|x\|\le 1$, т.е. оператор $A:l_1\to l_2$ ограничен.

Обозначим через $A_n:l_1\to l_2$ оператор, переводящий элемент $x=(x_1,x_2,...)\in l_1$ в элемент $A_n x=\left(x_1,\frac{x_2}{2},...,\frac{x_n}{n},0,0,...\right)\in l_2$. Область значений каждого оператора A_n конечномерна, следовательно, каждый оператор A_n вполне непрерывен (утверждение 3 предыдущего вопроса). Так как $\|A_n x-Ax\|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{x_k}{k}\right|^2\to 0$ при $n\to\infty$ (как остаток сходящегося ряда), то $\|A_n-A\|\to 0$, т. е. последовательность $\{A_n\}$ вполне непрерывных операторов сходится по норме к оператору A, что означает компактность оператора A.

3.4. Примеры линейных вполне непрерывных интегральных операторов

Пример 3.8. В пространстве $C[a,b]$ рассмотрим линейный интегральный оператор Фредгольма

$$Ax(t)=y(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds,\ x=x(t)\in C[a,b],$$

где функция (ядро) $K(t,s)$ непрерывна в квадрате $D=[a,b]\times[a,b]$. Пусть $M=\max_D|K(t,s)|$. Возьмем в $C[a,b]$ единичный шар $S_0(1)$.

Покажем сначала, что множество $A(S_0(1))$ [образ шара $S_0(1)$ в результате действия оператора] равномерно ограничено:

$$\|Ax(t)\|=\max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right|\le\max_{t\in[a,b]}\int_a^b|K(t,s)|\cdot|x(s)|ds\le M\cdot\max_{t\in[a,b]}\int_a^b ds=M(b-a).$$

Докажем теперь равностепенную непрерывность функций из множества $A(S_0(1))$. Для любой функции $y=y(t)\in A(S_0(1))$ имеем

$$|y(t_1)-y(t_2)|=\left|\int_a^b \big(K(t_1,s)x(s)-K(t_2,s)x(s)\big)ds\right|=\left|\int_a^b \big(K(t_1,s)-K(t_2,s)\big)x(s)\,ds\right|\le$$

$$\le\int_a^b |K(t_1,s)-K(t_2,s)||x(s)|ds.$$

Согласно неравенству Коши - Буняковского получаем

$$|y(t_1)-y(t_2)|^2\le\int_a^b |K(t_1,s)-K(t_2,s)|^2 ds\cdot\int_a^b |x(t)|^2 ds\le(b-a)\int_a^b |K(t_1,s)-K(t_2,s)|^2 ds.$$

Так как функция $K(t,s)$ равномерно непрерывна в квадрате D, то для любого числа $\varepsilon>0$ найдется число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых $t_1,t_2\in[a,b]$ и любого $s\in[a,b]$ из неравенства $|t_1-t_2|<\delta(\varepsilon)$ следует $|K(t_1,s)-K(t_2,s)|<\varepsilon$. Тогда при этом $|y(t_1)-y(t_2)|^2<(b-a)^2\varepsilon^2$, что и доказывает равномерную непрерывность функций из множества $A(S_0(1))$.

В результате по теореме Арцела множество $A(S_0(1))$ функций является компактным, что означает компактность интегрального оператора Фредгольма.

Пример 3.9. В пространстве $C_L[a,b]$ функций непрерывных с квадратом (норма $\|x\|=\int_a^b |x(t)|^2 dt$) рассмотрим линейный интегральный оператор $Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$ с непрерывным в квадрате $[a,b]\times[a,b]$ ядром $K(t,s)$. Аналогично, как в примере 3.8, показывается, что данный оператор является компактным оператором.

Пример 3.10. В пространстве $C[0,1]$ функций непрерывных на отрезке $[0,1]$ рассмотрим линейный интегральный оператор $Ax(t)=\int_0^t x(s)ds$. Покажем, что данный оператор является вполне непрерывным. Рассмотрим замкнутый единичный шар $S_0(1)=\left\{x\in C[0,1]:\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|\le 1\right\}$. Покажем сначала, что множество $A(S_0(1))$ равномерно ограничено:

$$\|Ax(t)\|=\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t x(s)ds\right|\le\max_{t\in[0,1]}\int_0^t |x(s)|ds\le\|x\|\max_{t\in[0,1]}\int_0^t ds=\|x\|\max_{t\in[0,1]}t\le\|x\|\le 1.$$

Докажем, что множество $A(S_0(1))$ функций равностепенно непрерывно. Для любой функции $y = y(t) \in A(S_0(1))$ и любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ (для определенности $t_1 < t_2$) имеем

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left|\int_0^{t_1} x(s)ds - \int_0^{t_2} x(s)ds\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} x(s)ds\right| \le \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{|x(s)|}_{\le 1} ds \le t_2 - t_1 = |t_1 - t_2|.$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ из неравенства $|t_1 - t_2| < \varepsilon$ следует $|y(t_1) - y(t_2)| \le |t_1 - t_2| < \varepsilon$, что доказывает равномерную непрерывность функций из множества $A(S_0(1))$.

В результате, по теореме Арцела множество $A(S_0(1))$ функций является компактным, что означает компактность интегрального оператора A.

Пример 3.11. В пространстве $C[0,1]$ функций непрерывных на отрезке $[0,1]$ рассмотрим линейный интегральный оператор $Ax(t) = \int_0^t x(s^2)ds$. Покажем, что данный оператор является вполне непрерывным. Рассмотрим замкнутый единичный шар $S_0(1) = \left\{x \in C[0,1] : \|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \le 1\right\}$. Заменой переменной $u = s^2$ данный оператор примет вид $Ax(t) = \int_0^{t^2} \frac{x(u)}{2\sqrt{u}} du$.

Покажем, что множество $A(S_0(1))$ равномерно ограничено:

$$\|Ax(t)\| = \max_{t\in[0,1]} \left|\int_0^{t^2} \frac{x(u)}{2\sqrt{u}} du\right| \le \max_{t\in[0,1]} \int_0^{t^2} \frac{|x(u)|}{2\sqrt{u}} dsu \le \underbrace{\|x\|}_{\le 1} \cdot \max_{t\in[0,1]} \int_0^{t^2} \frac{du}{2\sqrt{u}} \le \max_{t\in[0,1]} \sqrt{u}\Big|_{u=0}^{u=t^2} = \max_{t\in[0,1]} t = 1.$$

Докажем, что множество $A(S_0(1))$ функций равностепенно непрерывно. Для любой функции $y = y(t) \in A(S_0(1))$ и любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ имеем

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left|\int_0^{t_1^2} \frac{x(u)}{2\sqrt{u}} du - \int_0^{t_2^2} \frac{x(u)}{2\sqrt{u}} du\right| = \left|\int_{t_1^2}^{t_2^2} \frac{x(u)}{2\sqrt{u}} du\right| \le \int_{t_1^2}^{t_2^2} \frac{|x(u)|}{2\sqrt{u}} du \le \|x\| \int_{t_1^2}^{t_2^2} \frac{du}{2\sqrt{u}} \le$$

$$\le \int_{t_1^2}^{t_2^2} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{t_2^2} - \sqrt{t_1^2} = t_2 - t_1 = |t_1 - t_2|.$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ из неравенства $|t_1 - t_2| < \varepsilon$ следует $|y(t_1) - y(t_2)| \le |t_1 - t_2| < \varepsilon$, что доказывает равномерную непрерывность функций из $A(S_0(1))$.

В результате по теореме Арцела множество $A(S_0(1))$ функций является компактным, что означает компактность интегрального оператора A.

Пример 3.12. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим линейный интегральный оператор $Ax(t)=\int\limits_0^t x(\sqrt{s})ds$. Заменой переменной $u=\sqrt{s}$ данный оператор приводится к виду $Ax(t)=\int\limits_0^{\sqrt{t}} 2ux(u)du$. Как и в примере 3.11, показывается, что данный оператор является вполне непрерывным.

3.5. Другие примеры линейных вполне непрерывных операторов

Пример 3.13. Пусть даны два линейных нормированных пространства X,Y. Зафиксируем произвольные элементы $y_1,y_2,...,y_n\in Y$ и линейные ограниченые (непрерывные) функционалы $f_1,f_2,\ ...,f_n\in X^*$ ($f_k:X\to Y$, $k=1,2,...,n$). Рассмотрим линейный оператор $P_n:X\to Y$, определенный равенством

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\cdot y_k,\ x\in X.$$

Данный оператор называется конечномерным линейным оператором. Покажем, что он является компактным оператором. Во-первых, он является ограниченным (а значит, и непрерывным):

$$\|P_n(x)\|=\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\cdot y_k\right\|\le\sum_{k=1}^{n}\|f_k(x)\|\cdot\|y_k\|\le\left(\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|\cdot\|y_k\|\right)\|x\|=c\|x\|,$$

где $c=\sum\limits_{k=1}^{n}\|f_k\|\cdot\|y_k\|=const$ (элементы $y_1,y_2,...,y_n\in Y$ и линейные ограниченные функционалы $f_1,f_2,...,f_n\in X^*$ зафиксированы).

Далее, так как образ $P_n(x)$ любого элемента $x\in X$ есть конечная линейная комбинация векторов $y_1,y_2,...,y_n\in Y$, то область значений оператора P_n конечномерна. Тогда оператор является вполне непрерывным линейным оператором.

Пример 3.14. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим линейный оператор $Ax(t)=x(0)+tx(1)$. Покажем, что данный оператор является вполне непрерывным. Во-первых, множество $A(S_0(1))$ равномерно ограничено, так как для каждой функции $x\in S_0(1)=\left\{x\in C[0,1]:\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|\le1\right\}$ выполняется

$$\|Ax(t)\|=\max_{t\in[0,1]}|x(0)+tx(1)|\le|x(0)|+|x(1)|\cdot\max_{t\in[0,1]}|t|\le\|x\|+\|x\|\le2.$$

Во-вторых, множество $A(S_0(1))$ функций равностепенно непрерывно, так как для любой функции $y=y(t)\in A(S_0(1))$ и любых $t_1,t_2\in[0,1]$ имеем

$$|y(t_1)-y(t_2)|=|(x(0)+t_1x(1))-(x(0)+t_2x(1))|=|x(1)|\cdot|t_1-t_2|\le|t_1-t_2|<\varepsilon.$$

В результате по теореме Арцела множество $A\left(S_0(1)\right)$ функций является компактным, что означает компактность оператора A.

Пример 3.15. Рассмотрим линейный оператор $A:C^1[0,1]\to C[0,1]$, $Ax(t)=\ln(1+t)\cdot x(t)$. Покажем, что данный оператор является вполне непрерывным. Во-первых, множество $A\left(S_0(1)\right)$ равномерно ограничено, так как для каждой функции $x\in S_0(1)=\left\{x\in C^1[0,1]:\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|\le 1\right\}$ выполняется

$$\|Ax(t)\|=\max_{t\in[0,1]}\left|\ln(1+t)x(t)\right|\le\max_{t\in[0,1]}\left|\ln(1+t)\right|\cdot\max_{t\in[0,1]}|x(t)|\le\ln 2\|x\|\le\ln 2.$$

Покажем, что множество $A\left(S_0(1)\right)$ функций равностепенно непрерывно. Для любой функции $y=y(t)\in A\left(S_0(1)\right)$ и любых $t_1,t_2\in[0,1]$ имеем

$$\begin{aligned}&\left|y(t_1)-y(t_2)\right|=\left|\ln(1+t_1)x(t_1)-\ln(1+t_2)x(t_2)\right|=\\&=\left|\left(\ln(1+t_1)x(t_1)-\ln(1+t_1)x(t_2)\right)-\left(\ln(1+t_2)x(t_2)-\ln(1+t_1)x(t_2)\right)\right|=\\&=\left|\ln(1+t_1)\left(x(t_1)-x(t_2)\right)-x(t_2)\left(\ln(1+t_2)-\ln(1+t_1)\right)\right|\le\left|\ln(1+t_1)\right|\left|\left(x(t_1)-x(t_2)\right)\right|+\\&+\left|x(t_2)\right|\left|\left(\ln(1+t_2)-\ln(1+t_1)\right)\right|.\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой конечных приращений. Если функция $g(t)\in C^1[0,1]$, то при всех $t_1,t_2\in[0,1]$ $\left|g(t_1)-g(t_2)\right|=\left|g'(\xi)\right|\cdot|t_1-t_2|$, $\xi\in[0,1]$. Так как функции $\ln(1+t),x(t)\in C^1[0,1]$, то при всех $t_1,t_2\in[0,1]$

$$\begin{aligned}&\left|y(t_1)-y(t_2)\right|\le\left|\ln(1+t_1)\right|\left|\left(x(t_1)-x(t_2)\right)\right|+\left|x(t_2)\right|\left|\left(\ln(1+t_2)-\ln(1+t_1)\right)\right|\le\\&\le\ln 2\cdot\underbrace{\left|x'(\xi)\right|}_{\le 1}\cdot|t_1-t_2|+\underbrace{\frac{1}{1+\xi}}_{\le 1}\cdot|t_1-t_2|\le(1+\ln 2)|t_1-t_2|<\varepsilon.\end{aligned}$$

В результате по теореме Арцела множество $A\left(S_0(1)\right)$ функций является компактным, что означает компактность оператора A.

Пример 3.16. Рассмотрим линейный оператор дифференцирования $A:C^2[0,1]\to C[0,1]$, $Ax(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$. Покажем, что данный оператор является вполне непрерывным. Для любой функции $y(t)=x'(t)\in A\left(S_0(1)\right)$ из образа $A\left(S_0(1)\right)$ единичного шара $x\in S_0(1)=\left\{x\in C^{(2)}[0,1]:\|x\|_2\le 1\right\}$ имеем $|y(t)|=|x'(t)|\le\|x\|_2\le 1$, что означает равномерную ограниченность функций множества $A\left(S_0(1)\right)$.

Далее, по формуле конечных приращений (которую можно применять, так как функция $x=x(t)\in C^{(2)}[0,1]$, т.е. является дважды непрерывнодифференцируемой) $\left|y(t_1)-y(t_2)\right|=\left|x'(t_1)-x'(t_2)\right|=\left|x''(\xi)\right|\left|t_1-t_2\right|\le\left|t_1-t_2\right|$, где точка ξ лежит между точками t_1 и t_2, а $\left|x''(\xi)\right|\le\|x\|_2\le 1$. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ и любых $t_1,t_2\in[0,1]$ таких, что $\left|t_1-t_2\right|<\varepsilon$ следует $\left|y(t_1)-y(t_2)\right|\le\left|t_1-t_2\right|<\varepsilon$. Это доказывает равностепенную непрерывность функций множества $A(S_0(1))$. По теореме Арцела множество $A(S_0(1))$ функций является компактным, что означает компактность оператора дифференцирования A.

Приведем примеры линейных непрерывных (ограниченных) операторов, не являющихся компактными.

Пример 3.17. В $C[0,2]$ рассмотрим линейный оператор $Ax(t)=t\cdot x(t)$. Множество $A(S_0(1))$ функций равномерно ограничено, так как $\|Ax(t)\|=\max\limits_{t\in[0,2]}\left|tx(t)\right|=\max\limits_{t\in[0,2]}|t|\cdot\max\limits_{t\in[0,2]}\left|x(t)\right|\le 2\cdot\|x\|\le 2$.

Покажем, что множество $A(S_0(1))$ не является равностепенно непрерывным. Рассмотрим последовательность непрерывных на отрезке $[0,2]$ функций

$$x_n(t)=\begin{cases}1,\ t=1,\\ 0,\ t\in\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]\cup\left[1+\dfrac{1}{n},2\right],\\ \textit{кусочно}-\textit{линейна},\ t\in\left[1-\dfrac{1}{n},1+\dfrac{1}{n}\right].\end{cases}$$

Покажем, что существует число $\varepsilon>0$, что для любого достаточно малого числа $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ найдутся $t_1,t_2\in[0,2]$ и функция $x_n(t)\in C[0,2]$ такие, что: $t_1,t_2\in[0,2]$ и $\left|Ax_n(t_1)-Ax_n(t_2)\right|\ge\varepsilon$ [это докажет, что множество $A(S_0(1))$ функций не является равностепенно непрерывным]. Примем $\varepsilon=1$, $t_1=1,\ t_2=1-\dfrac{\delta}{2}$. Номер n возьмем таким образом, чтобы $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\delta}{2}$ (тогда $1-\dfrac{1}{n}>1-\dfrac{\delta}{2}$, т.е. $t_2<1-\dfrac{1}{n}$). Тогда $Ax_n(t_1)=t_1\cdot x_n(t_1)=1\cdot x_n(1)=1$, $Ax_n(t_2)=t_2\cdot x_n(t_2)=t_2\cdot 0=0$, $\left|Ax_n(t_1)-Ax_n(t_2)\right|=1=\varepsilon$.

Пример 3.18. Покажем, что оператор $A:l_2\to l_2$, заданный равенством $Ax=(0,x_1,x_2,x_3,x_4,...)$ ($x=(x_1,x_2,x_3,...)\in l_2$, $\|x\|=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty$), не является вполне непрерывным оператором.

Заметим, что данный оператор $A: l_2 \to l_2$ является равномерно ограниченным, так как $\|Ax\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} \le M$. Однако множество $A\left(S_1(\theta)\right)$ не является равностепенно непрерывным (здесь $S_1(\theta) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_2 : \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \le 1 \right\}$). Действительно, рассмотрим последовательность $\{e_n\} \subset S_1(\theta)$, где $e_n = (0, ...0, 1, 0, ...)$ (единица стоит на n-м месте), $\|e_n\| = 1$. При этом для любых $n < m$ имеем $\|Ae_n - Ae_m\|^2 = \left\| \left(\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, 1, 0, ... \right) - \left(\underbrace{0, ...0, ...0}_{m-1}, 1, 0, ... \right) \right\|^2 = 4 > \varepsilon$.

Задания для самостоятельного решения

Задание 3.1. Показать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, заданный равенством $(Ax)(t) = \int_0^1 e^{ts} \cdot x(s) ds$, является вполне непрерывным оператором.

Задание 3.2. Показать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, заданный равенством $(Ax)(t) = \int_0^t \sin s \cdot x(s) ds + x(t)$, не является вполне непрерывным оператором.

Задание 3.3. Показать, что оператор $A: C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$, заданный равенством $(Ax)(t) = \int_0^t \sin s \cdot x(s) ds + x(t)$, является вполне непрерывным оператором.

Задание 3.4. Показать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, заданный равенством $(Ax)(t) = \int_0^t \sin s \cdot x(s) ds + x(1)$, является вполне непрерывным оператором.

Задание 3.5. Показать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, заданный равенством $(Ax)(t) = \int_0^t x(s^3) ds$, является вполне непрерывным оператором.

Задание 3.6. Выяснить, при каких значениях параметров α, β, γ линейный интегральный оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, заданный равенством $(Ax)(t) = \int_0^1 t^{\alpha} s^{\beta} x(s^{\gamma}) ds$, является вполне непрерывным оператором.

Задание 3.7. Показать, что оператор $A:C^{(1)}[a,b]\to C[a,b]$, заданный равенством $(Ax)(t)=x(t)$, является вполне непрерывным оператором.

Задание 3.8. Выяснить, является ли оператор дифференцирования $(Ax)(t)=x'(t)$ вполне непрерывным оператором, если:
а) $A:C[a,b]\to C[a,b]$, б) $A:C^{(1)}[a,b]\to C[a,b]$, в) $A:C^{(2)}[a,b]\to C[a,b]$.

Задание 3.9. Показать, что оператор $A:l_1\to l_2$, заданный равенством $Ax=x$, не является вполне непрерывным оператором.

Задание 3.10. Показать, что оператор $A:l_1\to l_1$, заданный равенством $Ax=(0,x_1,0,x_2,0,x_3,0,x_4,...)$, не является вполне непрерывным оператором, а оператор $B:l_1\to l_1$, заданный равенством $Bx=(0,x_1,0,x_2,0,x_3,0,0,0,...)$, является вполне непрерывным оператором.

Задание 3.11. Показать, что оператор $A:l_1\to l_1$, заданный равенством $Ax=\left(0,x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\frac{x_4}{4},...\right)$, является вполне непрерывным оператором.

Задание 3.12. Показать, что $A:C[0,\pi]\to C[0,\pi]$, заданный равенством $(Ax)(t)=\sin(2t)\cdot x(t)$, не является вполне непрерывным оператором.

Ответы и указания к решению заданий для самостоятельного решения

3.1. Показать, что множество $A(S_0(1))$ (образ шара $S_0(1)=\{x\in C[0,1]:\|x\|\le 1\}$) равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. **3.2.** Показать, что множество $A(S_0(1))$ (образ шара $S_0(1)=\{x\in C[0,1]:\|x\|\le 1\}$) равномерно ограничено, но не равностепенно непрерывно. **3.3.** Сначала требуется показать, что множество $A(S_0(1))$ (образ шара $S_0(1)=\left\{x\in C^{(1)}[0,1]:\|x\|_1=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|\le 1\right\}$) равномерно ограничено:

$$\|(Ax)(t)\|_{C[0,1]}=\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t \sin s\cdot x(s)ds+x(t)\right|\le\max_{t\in[0,1]}\int_0^t|\sin s|\cdot|x(s)|ds+\max_{t\in[0,1]}|x(t)|\le$$

$$\le\|x\|_{C[0,1]}\cdot\max_{t\in[0,1]}\int_0^t ds+\|x\|_{C[0,1]}\le\|x\|_{C[0,1]}\cdot\left(\max_{t\in[0,1]}t+1\right)=2\|x\|_{C[0,1]}\le 2\|x\|_{C^{(1)}[0,1]}\le 2.$$

Далее, покажем, что множество $A(S_0(1))$ равностепенно непрерывно. Для любой функции $y=y(t)\in A(S_0(1))$ и любых $t_1,t_2\in[0,1]$ ($t_1<t_2$) имеем

$$|y(t_1)-y(t_2)|=\left|\int_0^{t_1}\sin s\cdot x(s)ds+x(t_1)-\int_0^{t_2}\sin s\cdot x(s)ds-x(t_2)\right|=$$

$$=\left|\int_{t_1}^{t_2}\sin s\cdot x(s)ds+\left(x(t_1)-x(t_2)\right)\right|\le\int_{t_1}^{t_2}|\sin s|\cdot|x(s)|ds+|x'(\xi)|\cdot|t_1-t_2|\le$$

$\le\|x\|\cdot\int_{t_1}^{t_2}ds+\|x\|\cdot|t_1-t_2|=2\|x\|\cdot|t_1-t_2|\le 2\cdot|t_1-t_2|$. **3.4.** Показать, что множество $A\left(S_0(1)\right)$ (образ шара $S_0(1)=\left\{x\in C[0,1]:\|x\|\le 1\right\}$) равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. **3.5.** Произвести замену переменной $u=s^3$ в интеграле, после чего оператор примет вид $(Ax)(t)=\frac{1}{3}\int_0^{t^3}\frac{x(u)}{u^{2/3}}du$. Согласно теореме Арцела показать, что множество $A\left(S_0(1)\right)$ (образ шара $S_0(1)=\left\{x\in C[0,1]:\|x\|\le 1\right\}$) равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. 3.6. После замены переменной интегрирования $u=s^{\gamma}$ оператор примет вид $(Ax)(t)=\frac{1}{\gamma}t^{\alpha}\int_0^1 u^{\frac{\beta}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}-1}x(u)du$. При этом оператор действует из $C[0,1]$ в $C[0,1]$ только, если $\alpha\ge 0$, $\frac{\beta+1}{\gamma}>0$, $\gamma\ne 0$. Образ $R(A)$ оператора конечномерный (одномерный), так как порождается одной функцией t^{α}, т.е. $R(A)=\left\langle t^{\alpha}\right\rangle$.

4. Уравнения в банаховых пространствах

4.1. Постановка задачи. Примеры

При исследовании линейных интегральных уравнений 2-го рода Э.Фредгольм получил ряд теорем, заведомо не имеющих места для произвольных уравнений. В дальнейшем Ф.Рисс и Ю.Шаудер показали, что особые свойства этого класса уравнений вытекают из компактности интегральных операторов, и построили общую теорию уравнений с компактными операторами.

Пусть $X-$банахово пространство, $A:X\to X-$линейный компактный оператор. Основным объектом исследования является уравнение вида

$$x=Ax+y,\ x,y\in X, \tag{4.1}$$

которое называется уравнением 2-го рода.

Рассмотрим примеры уравнений вида (4.1).

Пример 4.1. Линейное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода в пространстве $C[a,b]$:

$$x(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds+y(t),\ \ t\in[a,b]$$

с непрерывным в квадрате $[a,b]^2$ ядром $K(t,s)$ и непрерывной на отрезке $[a,b]$ функцией $y(t)$. Как было показано выше, оператор $Ax(t)=\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$ является компактным оператором.

Пример 4.2. Пусть $P-$числовое поле ($P=\mathbf{R}-$поле вещественных чисел или $P=\mathbf{C}-$поле комплексных чисел). Система линейных алгебраических уравнений вида (4.1) в пространстве P^n с квадратной матрицей $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ и вектор-столбцами $x,y\in P^n$ является уравнением 2-го рода.

Пример 4.3. Линейное интегральное уравнение Вольтерры в $C[a,b]$:

$$x(t)=\int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds+y(t),\ \ t\in[a,b]$$

с непрерывным в квадрате $[a,b]^2$ ядром $K(t,s)$ и непрерывной на отрезке $[a,b]$ функцией $y(t)$. Как было показано выше, оператор $Ax(t)=\int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds$ является компактным оператором.

Пример 4.4. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений вида (4.1) в l_2 с бесконечной матрицей $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^\infty$, удовлетворяющая условию, что ряд $\sum\limits_{i,j=1}^\infty \left|a_{ij}\right|^2$ сходится. Система (4.1) принимает вид

$$x_i=\sum_{j=1}^\infty a_{ij}x_j+y_i,\ \ i=1,2,...,$$

где $x=(x_1,x_2,...,x_k,...)$, $y=(y_1,y_2,...,y_k,...)\in l_2$. Как было показано выше, оператор, заданный матрицей $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^\infty$, является компактным оператором.

4.2. Первая теорема Фредгольма

Наряду с уравнением (4.1) $x=Ax+y\ \ (x,y\in X)$ рассмотрим соответствующее ему однородное уравнение

$$z-Az=\theta\ \ (z\in X), \tag{4.2}$$

сопряженное к (4.1) уравнение

$$f-A^*f=\omega\ \ \left(f,\omega\in X^*\right), \tag{4.3}$$

и однородное сопряженное уравнение

$$\psi-A^*\psi=\theta. \tag{4.4}$$

Заметим, что так как оператор $A:X\to X$ является компактным, то по теореме Шаудера сопряженный оператор $A^*:X^*\to X^*$ также является компактным оператором, т.е. все уравнения (4.2), (4.3), (4.4) есть уравнения Фредгольма 2-го рода.

Теорема 4.1 (первая теорема Фредгольма). Пусть X – банахово пространство, $A: X \to X$ – линейный компактный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:

1) уравнение (4.1) имеет единственное решение при любой правой части $y \in X$ (это означает, что $R(I-A)=X$, т.е. область значений оператора $I-A$ совпадает со всем пространством X);

2) уравнение (4.2) имеет только нулевое решение (это означает, что $N(I-A)=\{\theta\}$, множество нулей оператора $I-A$ состоит только из нулевого элемента);

3) уравнение (4.3) имеет единственное решение при любой правой части $\omega \in X^*$ (это означает, что $R\left(I-A^*\right)=X^*$, область значений оператора $I-A^*$ совпадает с пространством X^*);

4) уравнение (4.4) имеет только нулевое решение (это означает, что $N\left(I-A^*\right)=\{\theta\}$, множество нулей оператора $I-A^*$ состоит только из нулевого элемента).

При этом, если выполнено хотя бы одно из условий 1) – 4), то операторы $I-A$ и $I-A^*$ непрерывно обратимы, т.е. уравнения (4.1) и (4.3) однозначно разрешимы в виде $x=(I-A)^{-1}y$, $f=\left(I-A^*\right)^{-1}\omega$.

Рассмотрим примеры на применение первой теоремы Фредгольма.

Пример 4.5. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма в пространстве $C[0,1]$:

$$x(t)-\int_0^1 5t^3s^2x(s)\,ds = y(t),\ y(t)\in C[0,1],$$

в котором ядро $K(t,s)=5t^3s^2$ непрерывно в квадрате $[0,1]^2$. Данное уравнение есть уравнение вида (4.1), в котором линейный оператор $Ax(t)=\int_0^1 5t^3s^2x(s)\,ds$ есть оператор Фредгольма, а значит, компактный оператор. Покажем, что уравнение имеет единственное решение $x(t)$ при любой правой части $y(t)\in C[0,1]$. Найдем множество $N(I-A)=\left\{z(t)\in C[0,1]:\ z(t)-\int_0^1 5t^3s^2z(s)\,ds=0\right\}$. Перепишем уравнение в виде $z(t)-5t^3\cdot\int_0^1 s^2z(s)\,ds=0.$ Обозначая $A=\int_0^1 s^2z(s)\,ds$, получаем, что решение $z(t)=5At^3$. Умножив обе части последнего равенства на t^2 и проинтегрировав в отрезке $[0,1]$, получим

$$\int_0^1 z(t)t^2dt = 5A\int_0^1 t^5dt \Leftrightarrow A = 5A\cdot\frac{1}{6} \Leftrightarrow A = 0.$$

Итак, $z(t)=0$ ($t\in[0,1]$), т.е. $N(I-A)=\{\theta\}$. Тогда по первой теореме Фредгольма исходное интегральное уравнение однозначно разрешимо относительно функции $x(t)$ при любой правой части $y(t)\in C[0,1]$.

Найдем решение $x(t)$ при заданной функции $y(t)\in C[0,1]$. Переписав уравнение в виде

$$x(t)-5t^3\int_0^1 s^2x(s)ds = y(t) \Leftrightarrow x(t)=5At^3+y(t),$$

умножив обе части на t^2 и проинтегрировав в отрезке $[0,1]$, получим

$$x(t)t^2 = 5At^5+y(t)t^2 \Leftrightarrow \int_0^1 x(t)t^2dt = 5A\int_0^1 t^5dt+\int_0^1 y(t)t^2dt \Leftrightarrow A = 5A\cdot\frac{1}{6}+\int_0^1 y(t)t^2dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 6\int_0^1 y(t)t^2dt.$$

В результате решение имеет вид $x(t)=30\left(\int_0^1 y(t)t^2dt\right)t^3+y(t)$.

Пример 4.6. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром

$$x(t)-\int_a^b\big(a_1(t)b_1(s)+a_2(t)b_2(s)\big)x(s)ds = y(t), \tag{4.5}$$

где $a_1(t),b_1(t),a_2(t),b_2(t),y(t)\in C[a,b]$. Будем считать, что функции $a_1(t),a_2(t)$ линейно независимы на отрезке $[a,b]$. Выясним, при каких условиях уравнение (4.5) имеет единственное решение. В данном случае оператор, заданный равенством $(Ax)(t)=\int_a^b\big(a_1(t)b_1(s)+a_2(t)b_2(s)\big)x(s)ds$, есть вполне непрерывный линейный оператор. Найдем множество $N(I-A)$, решив однородное уравнение

$$z(t)-\int_a^b\big(a_1(t)b_1(s)+a_2(t)b_2(s)\big)z(s)ds = 0. \tag{4.6}$$

Обозначив $c_k=\int_a^b b_k(s)z(s)ds,\ k=1,2$, получим решение $z(t)=c_1a_1(t)+c_2a_2(t)$ с некоторыми константами c_1,c_2. Подставляя функцию $z(t)=c_1a_1(t)+c_2a_2(t)$ в (4.6) и приравнивая коэффициенты при функциях $a_1(t),a_2(t)$, получаем

$$c_1a_1(t)+c_2a_2(t)-\int_a^b\big(a_1(t)b_1(s)+a_2(t)b_2(s)\big)\big(c_1a_1(s)+c_2a_2(s)\big)ds = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_1a_1(t)+c_2a_2(t)-a_1(t)\int_a^b(c_1a_1(s)+c_2a_2(s))b_1(s)ds-a_2(t)\int_a^b(c_1a_1(s)+c_2a_2(s))b_2(s)ds=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1(t)(c_1-c_1\alpha_{11}-c_2\alpha_{12})+a_2(t)(c_2-c_1\alpha_{21}-c_2\alpha_{22})=0,$$

где обозначен коэффициент $\alpha_{ij}=\int_a^b a_j(s)b_i(s)ds\ (i,j=\overline{1,2})$. В силу линейной независимости функций $a_1(t),a_2(t)$ приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} &c_1(1-\alpha_{11})+c_2(-\alpha_{12})=0,\\ &c_1(-\alpha_{21})+c_2(1-\alpha_{22})=0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Если система (4.7) имеет только тривиальное решение $c_1=c_2=0$ (матрица этой системы есть неособенная матрица), то единственным решением однородного интегрального уравнения (4.6) является функция $z(t)\equiv 0$, т.е. $N(I-A)=\{\theta\}$. В этом случае по теореме Фредгольма 1 уравнение (4.5) имеет единственное решение $x(t)$ при любой правой части $y(t)$.

Решая уравнение (4.5) как интегральное уравнение с вырожденным ядром в случае $N(I-A)=\{\theta\}$, получаем единственное решение

$$x(t)=c_1a_1(t)+c_2a_2(t)+y(t),$$

где коэффициенты c_1,c_2 однозначно определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} &c_1(1-\alpha_{11})+c_2(-\alpha_{12})=\gamma_1,\\ &c_1(-\alpha_{21})+c_2(1-\alpha_{22})=\gamma_2, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где $\gamma_i=\int_a^b b_i(s)y(s)ds\ (i=\overline{1,2})$.

В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}(ts+t^2s^2)x(s)ds=y(t),\ y(t)\in C[-1,1], \tag{4.9}$$

в котором $a_1(t)=\lambda t,\ b_1(s)=s,\ a_2(t)=\lambda t^2,\ b_2(s)=s^2$. Система (4.7) имеет вид

$$c_1\left(1-\frac{2\lambda}{3}\right)+c_2\cdot 0=0,\ \ c_1\cdot 0+c_2\left(1-\frac{2\lambda}{5}\right)=0.$$

При $\lambda\neq\frac{3}{2},\lambda\neq\frac{5}{2}$ данная система имеет единственное тривиальное решение, т.е. $N(I-A)=\{\theta\}$, а уравнение (4.9) имеет единственное решение $x(t)=\lambda c_1t+\lambda c_2t^2+y(t)$, где $c_1=\frac{3\gamma_1}{3-2\lambda},c_2=\frac{5\gamma_2}{5-2\lambda}$ однозначно находятся из системы (4.8) (при этом $\gamma_1=\int_{-1}^{1}sy(s)ds$, $\gamma_2=\int_{-1}^{1}s^2y(s)ds$).

Пример 4.7. Доказать, что интегральное уравнение Вольтера

$$x(t)-\int_0^t x(s)ds = y(t),\; y(t)\in C[0,1]$$

имеет единственное решение $x(t)$ при любой функции $y(t)\in C[0,1]$, и найти это решение.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $x(t)-\int_0^t x(s)ds=0$. Так как $x(t)=\int_0^t x(s)ds$, то $x(0)=\int_0^0 x(s)ds=0$. Продифференцировав обе части однородного уравнения, получим дифференциальное уравнение $x'(t)-x(t)=0$ с начальным условием $x(0)=0$ (задачу Коши). Решением задачи Коши является единственная функция $x(t)\equiv 0$, т.е. множество $N(I-A)=\{\theta\}$. Тогда по теореме 1 исходное интегральное уравнение однозначно разрешимо относительно функции $x(t)$ при любой функции $y(t)\in C[0,1]$.

Вернемся к исходному интегральному уравнению. Обозначив $u(t)=\int_0^t x(s)ds$, получим $u'(t)=x(t)$. Тогда получим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения 1-го порядка: $u'(t)-u(t)=y(t)$, $u(0)=0$. Найдем общее решение этого уравнения методом вариации. Общее решение соответствующего однородного уравнения $u'(t)-u(t)=0$ имеет вид $u(t)=Ce^t$ ($C=const$). Тогда общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде $u(t)=C(t)e^t$. Подставляя функцию $u(t)=C(t)e^t$ и ее производную $u'(t)=C'(t)e^t+C(t)e^t$ в неоднородное уравнение, получаем

$$C'(t)e^t = y(t) \Leftrightarrow C'(t)=e^{-t}y(t) \Leftrightarrow C(t)=\int_0^t e^{-s}y(s)ds+\overline{C}\ \left(\overline{C}=const\right).$$

В итоге общее решение $u(t)=C(t)e^t=\left(\int_0^t e^{-s}y(s)ds+\overline{C}\right)e^t$. Исходя из начального условия $u(0)=0$, получим $0=\left(\int_0^0 e^{-s}y(s)ds+\overline{C}\right)e^0 \Leftrightarrow \overline{C}=0$. Тогда $u(t)=\int_0^t e^{-s}y(s)ds\cdot e^t=\int_0^t e^{t-s}y(s)ds$. Учитывая, что $x(t)-u(t)=y(t)$, получаем искомое решение $x(t)=u(t)+y(t)=\int_0^t e^{t-s}y(s)ds+y(t)$.

4.3. Вторая теорема Фредгольма

Теорема 4.2 (вторая теорема Фредгольма). Пусть $X-$банахово пространство, $A:X\to X-$линейный компактный оператор. Тогда однородные уравнения (4.2) и (4.4) имеют одинаковое (конечное) число линейно независимых решений. Другими словами, $\dim N(I-A)=\dim N\left(I-A^*\right)=r<+\infty$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий вторую теорему Фредгольма.

Пример 4.8. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма в $C[0,\pi/2]$:

$$x(t)-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot x(s)ds=y(t),\ y(t)\in C[0,\pi/2].$$

Ядро этого уравнения – функция $K(t,s)=\sin^2 t$. Покажем, что соответствующее однородное уравнение

$$z(t)-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}K(t,s)\cdot z(s)ds=0\Leftrightarrow z(t)-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot z(s)ds=0 \qquad (4.10)$$

и однородное сопряженное уравнение

$$\psi(t)-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}K(s,t)\cdot\psi(s)ds=0\Leftrightarrow\psi(t)-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 s\cdot\psi(s)ds=0 \qquad (4.11)$$

имеют одинаковое (конечное) число линейно независимых решений. Обозначив $k=\int_0^{\pi/2}z(s)ds$ и переписав уравнение (4.10) в виде

$z(t)=\frac{4}{\pi}\sin^2 t\cdot\int_0^{\pi/2}z(s)ds=\frac{4}{\pi}k\cdot\sin^2 t$, получим, что решение уравнения (4.10) необходимо искать в виде $z(t)=\frac{4}{\pi}k\cdot\sin^2 t$. Подставляя его в уравнение (4.10), получаем верное равенство при всех значениях k:

$$z(t)-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot z(s)ds=0\Leftrightarrow\frac{4}{\pi}k\cdot\sin^2 t-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot\left(\frac{4}{\pi}k\cdot\sin^2 s\right)ds=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k-\frac{4}{\pi}k\int_0^{\pi/2}\sin^2 sds=0\Leftrightarrow 1-\frac{4}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2 sds=0\Leftrightarrow 1-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=0.$$

Таким образом, $N(I-A)=\left\{z(t)=k\sin^2 t,\ k\in\mathbf{R}\right\},\dim N(I-A)=1$ (так как базис множества $N(I-A)$ состоит из одной функции $z_0(t)=\sin^2 t$).

Далее, обозначая $l=\int_0^{\pi/2}\sin^2 s\cdot\psi(s)ds$, получаем, что решение уравнения (4.11) следует искать в виде $\psi(t)=\frac{4}{\pi}l$. Подставляя решение в уравнение (4.11), найдем, что $l-$ любое число. Значит, $N\left(I-A^{*}\right)=\{\psi(t)=l\}, \dim N(I-A)=1$. Итак, $\dim N(I-A)=\dim N\left(I-A^{*}\right)=1$.

4.4. Третья теорема Фредгольма

Теорема 4.3 (третья теорема Фредгольма). Пусть $X-$банахово пространство, $A: X \rightarrow X-$ линейный компактный оператор. Для того чтобы уравнение (4.1) имело решение при $y \in X$, необходимо и достаточно, чтобы $\psi(y)=0$ для любого решения $\psi \in X^{*}$ однородного сопряженного уравнения (4.4).

В результате получаем следующие выводы:

1) $R(I-A)=X$, $N(I-A)=\{\theta\}$. В этом случае уравнение (4.1) однозначно разрешимо относительно элемента $x=(I-A)^{-1} y$ при любом $y \in X$;

2) $N(I-A) \neq\{\theta\}$ (оператор $I-A$ не является обратимым) и существует ненулевое решение $\psi \in X^{*}$ уравнения $\psi-A^{*} \psi=\theta$, для которого $\psi(y) \neq 0$. В этом случае уравнение (4.1) не имеет решений;

3) $N(I-A) \neq\{\theta\}$ (оператор $I-A$ не является обратимым) и $\psi(y)=0$ для любого ненулевого решения $\psi \in X^{*}$ уравнения $\psi-A^{*} \psi=\theta$. В этом случае уравнение (4.1) разрешимо, причем любое решение имеет вид

$$x=x_{0}+\sum_{k=1}^{r} c_{k} x_{k},$$

где $r=\dim N(I-A)$, $\left\{x_{k}\right\}_{k=1,2, \ldots, r}$ есть базис пространства $N(I-A)=\{z \in X:(I-A) z=\theta\}$ (фундаментальная система решений уравнения (4.4)), $x_{0}-$частное решение уравнения (2.1), $c_{k} \in P-$произвольные числа.

Из теорем Фредгольма 1 и 3 следует утверждение, которое принято называть **альтернативой Фредгольма**: либо уравнение (4.1) однозначно разрешимо относительно элемента $x \in X$, либо соответствующее однородное уравнение (4.2) имеет ненулевые решения.

Приведем примеры, иллюстрирующие третью теорему Фредгольма.

Пример 4.9. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма в пространстве $C[0, \pi / 2]$:

$$x(t)-\frac{4}{\pi} \int_{0}^{\pi / 2} \sin ^{2} t \cdot x(s) d s=y(t), \, y(t) \in C[0, \pi / 2].$$

Выясним, при какой правой части $y(t) \in C[0, \pi / 2]$ данное уравнение разрешимо относительно функции $x(t) \in C[0, \pi / 2]$. Выше (см. пример 4.8) было установлено, что $N(I-A) \neq\{\theta\}$ (соответствующее однородное уравнение имеет ненулевые решения $z(t)=k \sin ^{2} t, \, k \in \mathbf{R}$), что означает невыполнение условий первой теоремы Фредгольма. Обозначив $k=\int\limits_0^{\pi/2} z(s)ds$,

решение будем искать в виде $x(t)=\frac{4}{\pi}k\cdot\sin^2 t+y(t)$. Подставляя решение в уравнение, получаем

$$\frac{4}{\pi}k\cdot\sin^2 t+y(t)-\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot\left(\frac{4}{\pi}k\cdot\sin^2 s+y(s)\right)ds=y(t)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k\cdot\sin^2 t-\sin^2 t\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{4}{\pi}k\cdot\sin^2 s+y(s)\right)ds=0\Leftrightarrow k-\frac{4}{\pi}k\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 s ds-\int\limits_0^{\pi/2}y(s)ds=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^{\pi/2}y(s)ds=0.$$

Последнее условие есть условие разрешимости уравнения относительно функции $x(t)$. Например, для функции $y(t)=2t-\pi$ условие не выполняется:

$$\int\limits_0^{\pi/2}(2s-\pi)ds=\left(s^2-\pi s\right)\Big|_0^{\pi/2}=\pi^2/4-\pi^2/2\neq 0,$$

а для функции $y(t)=4t-\pi$ выполняется, так как

$$\int\limits_0^{\pi/2}(4s-\pi)ds=\left(2s^2-\pi s\right)\Big|_0^{\pi/2}=\pi^2/2-\pi^2/2=0.$$

В последнем случае решение имеет вид $x(t)=\frac{4}{\pi}k\cdot\sin^2 t+4t-\pi$, $k\in\mathbf{R}$.

Пример 4.10. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}\left(ts+t^2s^2\right)x(s)ds=t^2-t^4. \qquad (4.12)$$

В примере 4.6 показано, что при $\lambda\neq\frac{3}{2},\lambda\neq\frac{5}{2}$ множество $N(I-A)=\{\theta\}$ и данное интегральное уравнение имеет единственное решение относительно функции $x(t)$ при любой правой части.

При $\lambda=\frac{3}{2}$ система

$$c_1\left(1-\frac{2\lambda}{3}\right)+c_2\cdot 0=0,\ c_1\cdot 0+c_2\left(1-\frac{2\lambda}{5}\right)=0$$

имеет нетривиальное множество решений $c_1\in\mathbf{R},c_2=0$, и $N(I-A)=$ $=\left\{z(t)=c_1a_1(t)=c_1t\right\}$. При этом коэффициенты

$$\gamma_1=\int\limits_a^b b_1(s)y(s)ds=\int\limits_{-1}^{-1}s\cdot\left(s^2-s^4\right)ds=0,\ \gamma_2=\int\limits_a^b b_2(s)y(s)ds=\int\limits_{-1}^{-1}s^2\cdot\left(s^2-s^4\right)ds=\frac{4}{35}.$$

Система (4.8) при $\lambda = \dfrac{3}{2}$ принимает вид

$$\begin{cases} c_1\left(1-\dfrac{2\lambda}{3}\right)+c_2\cdot 0=\gamma_1, \\ c_1\cdot 0+c_2\left(1-\dfrac{2\lambda}{5}\right)=\gamma_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1\cdot 0+c_2\cdot 0=0, \\ c_1\cdot 0+c_2\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{35}, \end{cases} \Leftrightarrow c_1\in\mathbf{R}, c_2=\dfrac{2}{7}.$$

В результате решение уравнения (4.12) имеет вид $x(t)=\lambda c_1 t+\dfrac{2\lambda}{7}t^2+t^2-t^4$.

При $\lambda = \dfrac{5}{2}$ система

$$c_1\left(1-\dfrac{2\lambda}{3}\right)+c_2\cdot 0=0,\ \ c_1\cdot 0+c_2\left(1-\dfrac{2\lambda}{5}\right)=0$$

имеет решение $c_1=0, c_2\in\mathbf{R}$ и множество $N(I-A)=\left\{z(t)=c_2a_2(t)=c_2t^2\right\}$. Система (4.8) при $\lambda=\dfrac{5}{2}$ принимает вид

$$\begin{cases} c_1\left(1-\dfrac{2\lambda}{3}\right)+c_2\cdot 0=\gamma_1, \\ c_1\cdot 0+c_2\left(1-\dfrac{2\lambda}{5}\right)=\gamma_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+c_2\cdot 0=0, \\ c_1\cdot 0+c_2\cdot 0=\dfrac{4}{35}. \end{cases}$$

В силу ее несовместности при $\lambda=\dfrac{5}{2}$ уравнение (4.12) не имеет решений.

Пример 4.11. Установим критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений

$$\overline{x}=A\overline{x}+\overline{y} \tag{4.13}$$

в пространстве P^n ($P-$числовое поле) с квадратной матрицей $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ и вектор-столбцами $\overline{x}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)^T, \overline{y}=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)^T\in P^n$.

Если $N(I-A)=\{\theta\}$ (однородная система $\overline{z}=A\overline{z}$ имеет только нулевое решение), то система (4.13) однозначно разрешима относительно вектор-столбца $\overline{x}=(I-A)^{-1}\overline{y}$ (обратный оператор задается матрицей $(E-A)^{-1}$).

Пусть $N(I-A)\neq\{\theta\}$, т.е. однородная система $\overline{z}=A\overline{z}$ имеет ненулевое решение, и однородная сопряженная система $\overline{\psi}-A^*\overline{\psi}=\theta$ имеет ненулевое решение $\overline{\psi}=\left(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n\right)^T\in\left(P^n\right)^*=P^n$, для которого $\overline{\psi}\left(\overline{y}\right)\neq 0$. В этом случае система (2.13) несовместна.

Заметим, что в случае пространства $\mathbf{C}^n$ однородной сопряженной системе $\overline{\psi}-A^*\overline{\psi}=\theta$ соответствует система уравнений с эрмитово-сопряженной матрицей $\overline{A}^T = \left(\overline{a_{ji}}\right)_{i,j=1}^n$, а $\overline{\psi}\left(\overline{y}\right) = \sum_{k=1}^n \psi_k \overline{y_k}$, где $\overline{y_k}$ есть сопряженное выражение для y_k.

Пусть $N\left(I - A\right) \neq \{\theta\}$, и для любого ненулевого решения $\overline{\psi} = \left(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\right)^T \in \left(P^n\right)^* = P^n$ однородной сопряженной системы $\overline{\psi} - A^*\overline{\psi} = \theta$ выполняется равенство $\overline{\psi}\left(\overline{y}\right) = \sum_{k=1}^n \psi_k \overline{y_k} = 0$. В этом случае исходная система имеет бесконечное множество решений в виде $\overline{x} = \overline{x_0} + \sum_{k=1}^r c_k \overline{x_k}$, где $r = \dim N\left(I - A\right)$, $\left\{\overline{x_k}\right\}_{k=1,2,...,r}$ есть базис пространства $N\left(I - A\right) = \left\{\overline{z} \in P^n : \left(I - A\right)\overline{z} = \overline{\theta}\right\}$ (фундаментальная система решений), $\overline{x_0}$ – какое-нибудь частное решение уравнения (4.13), $c_k \in P$ – произвольные числа.

Исследуем на совместность систему в пространстве C^n с матрицей $A = \begin{pmatrix} -i & -1+i & 0 \\ -2 & 0 & -i \\ -1-i & -2-i & 1-i \end{pmatrix}$ и вектор-столбцом $\overline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2+i \end{pmatrix}$. Сначала найдем решения однородной системы $\overline{z} = A\overline{z}$ (найдем множество $N\left(I - A\right)$). Матрица этой системы имеет вид $E - A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 0 \\ 2 & 1 & i \\ 1+i & 2+i & i \end{pmatrix}$. Приводя ее к ступенчатому виду, получаем $E - A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ 0 & -1+3i & -1-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг этой матрицы равен 2, что означает существование ненулевых решений однородной системы $\overline{z} = A\overline{z}$ ($N\left(I - A\right) \neq \{\theta\}$).

Далее найдем решение однородной сопряженной системы $\overline{\psi} - A^*\overline{\psi} = \theta$. Матрица этой системы имеет вид $E - \overline{A}^* = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i & 0 \\ 2 & 1 & -i \\ 1-i & 2-i & -i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & 1-i \\ 1+i & 1 & 2-i \\ 0 & -i & -i \end{pmatrix}$. Решая систему методом Гаусса, получаем общее решение $\overline{\psi} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} c$, где $c \in C$ есть произвольное число. Проверим условие ортогональности $\overline{\psi}\left(\overline{y}\right) = \sum_{k=1}^n \psi_k \overline{y_k} = i \cdot 1 + \left(-2\right) \cdot \left(-1\right) + 1 \cdot \left(-2 - i\right) = i + 2 - 2 - i = 0$. Справедливость равенства показывает, что система (4.13) разрешима и имеет бесконечное множество решений.

Задания для самостоятельного изучения

Задание 4.1. С помощью теорем Фредгольма 1 и 3 исследовать в $\mathbf{R}^3$ на совместность систему с матрицей $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & -4 & 0 \\ -5 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ и вектором $\overline{y}=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Задание 4.2. С помощью теорем Фредгольма 1 и 3 исследовать в $\mathbf{C}^2$ на совместность систему с матрицей $A=\begin{pmatrix} 1-i & -1+i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$ и вектором $\overline{y}=\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задание 4.3. Исследовать на совместность интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром в пространстве $C[0,\pi]$:

$x(t)-\lambda\int\limits_0^{\pi}\sin(2t+s)x(s)ds=y(t)$, если а) $y(t)\in C[0,\pi]-$ произвольная функция, б) $y(t)=2t-\pi$.

Задание 4.4. Исследовать на совместность интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода в пространстве $C[-1,1]$: $x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}\left(ts-t^2s^2\right)x(s)ds=t^2+t^4$.

Задание 4.5. Показать, что для уравнения $x(t)+6\int\limits_0^1\left(t^2-t\right)x(s)ds=y(t)$ в пространстве $C[0,1]$ не выполняются условия первой теоремы Фредгольма. Показать, что при $y(t)=4t^3-2t$ уравнение разрешимо, а при $y(t)=t^3-2t$ не разрешимо относительно функции $x(t)$.

Ответы и указания к решению

4.1. Система совместна, при этом множество $N(I-A)=\left\{\overline{z}=(-5c,4c,c)^T, c\in\mathbf{R}\right\}$ нетривиально, $\dim N(I-A)=1$, множество $N\left(I-A^*\right)=\left\{\overline{\psi}=(-c,-c,c)^T, c\in\mathbf{R}\right\}$ нетривиально, $\dim N\left(I-A^*\right)=1$, условие ортогональности (совместности системы) $\overline{\psi}\left(\overline{y}\right)=0$ выполняется.

4.2. Система совместна, при этом множество $N(I-A)=\left\{\overline{z}=\left((1+i)c,\ c\right)^T, c\in\mathbf{C}\right\}$ нетривиально, $\dim N(I-A)=1$, множество $N\left(I-A^*\right)=\left\{\overline{\psi}=(ic,\ c)^T,\ c\in\mathbf{C}\right\}$ нетривиально, $\dim N\left(I-A^*\right)=1$, условие ортогональности (совместности системы) выполняется: $\overline{\psi}\left(\overline{y}\right)=ic\cdot i+c\cdot 1=-c+c=0$.

4.3. а) При $\lambda\neq\frac{3}{4},\lambda\neq-\frac{3}{2}$ уравнение однозначно разрешимо относительно функции $x(t)$ при любой правой части и имеет вид

$$x(t)=\frac{3\lambda\sin(2t)}{3-4\lambda}\int_0^{\pi}\cos s\cdot y(s)ds+\frac{3\lambda\cos(2t)}{3+2\lambda}\int_0^{\pi}\sin s\cdot y(s)ds+y(t).$$

б) При $\lambda\neq\frac{3}{4},\lambda\neq-\frac{3}{2}$ уравнение однозначно разрешимо относительно функции $x(t)$ и имеет вид $x(t)=\frac{12\lambda}{3-4\lambda}\sin(2t)+\pi-2t$, при $\lambda=\frac{3}{4}$ уравнение неразрешимо, при $\lambda=-\frac{3}{2}$ уравнение имеет бесконечное множество решений, все они имеют вид $x(t)=C\cos(2t)-2\sin(2t)+\pi-2t$, $C=const$.

4.4. При $\lambda\neq\frac{3}{2},\lambda\neq-\frac{5}{2}$ уравнение однозначно разрешимо относительно функции $x(t)$ и имеет вид $x(t)=-\frac{24\lambda}{35+14\lambda}t^2+t^2+t^4$, при $\lambda=\frac{3}{2}$ уравнение имеет бесконечное множество решений $x(t)=Ct+\frac{5}{14}t^2+t^4$, $C-$произвольная константа, при $\lambda=-\frac{5}{2}$ уравнение неразрешимо.

4.5. Множество $N(I-A)\neq\left\{z(t)=A\left(t^2-t\right),A\in\mathbf{R}\right\}$ не тривиально. В случае $y(t)=4t^3-2t$ условие ортогональности (разрешимости) уравнения выполняется: $\int_0^1 y(t)dt=\int_0^1\left(4t^3-2t\right)dt=0$. В случае правой части $y(t)=t^3-2t$ условие ортогональности уравнения не выполняется: $\int_0^1 y(t)dt=\int_0^1\left(t^3-2t\right)dt\neq0$.

5. Спектральная теория линейных операторов

5.1. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Определение 5.1. Пусть $X-$банахово пространство над полем комплексных чисел C, $A:X\to X$— линейный оператор. Число $\lambda\in C$ называется собственным значением оператора A, если существует ненулевой элемент $x\in X$, $x\neq\theta$ такой, что $Ax=\lambda x$; при этом $x\in X$ называется собственным элементом (собственным вектором) оператора A, отвечающим собственному значению $\lambda\in C$.

При этом собственный элемент $x\in X$ определяется с точностью до скалярного множителя, т.е. для любого $\alpha\in C$ элемент $\alpha x\in X$ также является собственным элементом, так как в силу линейности оператора выполняется $A(\alpha x)=\alpha A(x)=\alpha(\lambda x)=\lambda(\alpha x)$.

Следующие утверждения известны из курса линейной алгебры (они были доказаны в случае конечномерных пространств), которые будут справедливы и в случае бесконечномерных пространств:

1) Если $\lambda \in C$ есть собственное значение линейного оператора A, то соответствующая ему совокупность собственных элементов $X_\lambda = \{x \in X : Ax = \lambda x\}$ (с прибавлением к нему нулевого элемента) образует линейное многообразие в X. Если при этом оператор A есть непрерывный (ограниченный) оператор, то $X_\lambda = \{x \in X : Ax = \lambda x\}$ - собственное подпространство (замкнутое линейное многообразие).

2) Множество $X_\lambda = \{x \in X : Ax = \lambda x\} = N(A - \lambda I)$, где $I -$тождественный оператор в пространстве X.

3) Собственные элементы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Напомним основные факты о собственных значениях и собственных векторах линейного оператора в конечномерных пространствах.

Зафиксируем в X размерности n базис $\mathbf{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$, и пусть оператору A в этом базисе соответствует матрица $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n,n}$, так что при любом $j = 1,2,...,n$: $Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_j$ (разложение образов базисных векторов по базису). При этом для любого элемента $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ имеем $Ax = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \right) e_j$. Тогда уравнение $Ax = \lambda x$ можно переписать в следующем виде:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = \theta \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_j \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}\right) x_j = 0,\ i = 1,2,...,n,$$

где $\delta_{ij} -$символ Кронекера. Для того чтобы последняя система имела нетривиальное решение относительно собственного вектора x, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы $A - \lambda E$ был равен нулю:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением и представляет собой уравнение n-й степени относительно $\lambda \in \mathbf{C}$. Все собственные значения и только они являются корнями характеристического уравнения. В случае комплексного X характеристическое уравнение имеет ровно n корней с учетом их кратности.

Пусть $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ - одно из собственных значений оператора. Тогда система определяет собственное линейное многообразие, отвечающее $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, так как эта система при $\lambda = \lambda_0$ имеет нетривиальные решения в силу того, что $\det(A - \lambda E) = 0$. При этом собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Пример 5.1. Оператор задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ -1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\left(1-\lambda\right)\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)=0.$$

Его корни (собственные значения линейного оператора): $\lambda_{1,2}=1\pm i,\ \lambda_3=1$.

Соответствующая однородная система для нахождения собственного вектора $x=\sum\limits_{j=1}^{3}x_je_j$ имеет вид

$$\begin{cases}\left(1-\lambda\right)x_1+x_2=0,\\ -x_1+\left(1-\lambda\right)x_2=0,\\ \qquad\left(1-\lambda\right)x_3=0.\end{cases}$$

Полагая в этой системе $\lambda=1+i$, получаем однородную систему

$$\begin{cases}\left(-i\right)x_1+x_2=0,\\ -x_1-ix_2=0,\\ ix_3=0,\end{cases}$$

общее решение которой имеет вид $x_1=-\alpha i,\ x_2=\alpha, x_3=0\ \ (\alpha\in C)$. При этом соответствующий собственный вектор имеет вид $\left(-i,\ 1,0\right)$.

5.2. Примеры вычисления собственных значений и собственных векторов линейного оператора в бесконечномерных пространствах

Пример 5.2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $A:C\left[-\pi,\pi\right]\to C\left[-\pi,\pi\right],\ Ax\left(t\right)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\left(t-s\right)x\left(s\right)ds$.

Составим уравнение $Ax\left(t\right)=\lambda x\left(t\right)$,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\left(t-s\right)x\left(s\right)ds=\lambda x\left(t\right)\Leftrightarrow\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos t\cos s+\sin t\sin s\right)x\left(s\right)ds=\lambda x\left(t\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha\cos t+\beta\sin t=\lambda x\left(t\right),\text{ где числа }\alpha=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos sx\left(s\right)ds,\beta=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin sx\left(s\right)ds.$$

При $\lambda\neq0$ $x\left(t\right)=\lambda^{-1}\left(\alpha\cos t+\beta\sin t\right)$. Подставляя функцию $x\left(t\right)$ в уравнение, получаем

$$\alpha\cos t+\beta\sin t=\lambda x(t)\Leftrightarrow \cos t\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos s(\alpha\cos s+\beta\sin s)ds}_{\alpha}+$$

$$+\sin t\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin s(\alpha\cos s+\beta\sin s)ds}_{\beta}=\lambda(\alpha\cos t+\beta\sin t).$$

Группируя коэффициенты при функциях косинуса и синуса, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases}\cos t:\ \alpha\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 sds+\beta\int_{-\pi}^{\pi}\cos s\sin sds=\lambda\alpha,\\ \sin t:\ \alpha\int_{-\pi}^{\pi}\sin s\cos sds+\beta\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 sds=\lambda\beta,\end{cases}$$

откуда, учитывая, что $\int_{-\pi}^{\pi}\cos s\sin sds=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 sds=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 sds=\pi$, получаем $\alpha(\pi-\lambda)=0,\ \beta(\pi-\lambda)=0$. Так как собственная функция должна быть ненулевой, то последняя система уравнений имеет ненулевое решение только при $\lambda=\pi$. Значит, собственное значение оператора $\lambda=\pi$. При этом значении имеем два собственных вектора (функции) $x_1(t)=\cos t, x_2(t)=\sin t$.

Пример 5.3. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $Ax(t)=\int_0^1(t-s)x(s)ds$ (над полем комплексных чисел).

Составим уравнение $Ax(t)=\lambda x(t)$, т.е.

$$\int_0^1(t-s)x(s)ds=\lambda x(t)\Leftrightarrow t\int_0^1 x(s)ds-\int_0^1 sx(s)ds=\lambda x(t)\Leftrightarrow \alpha t-\beta=\lambda x(t),$$

где числа $\alpha=\int_0^1 x(s)ds,\beta=\int_0^1 sx(s)ds$. При $\lambda\neq 0$ $x(t)=\lambda^{-1}(\alpha t-\beta)$. Подставляя функцию $x(t)$ в уравнение, получим

$$\alpha t-\beta=\lambda x(t)\Leftrightarrow t\underbrace{\int_0^1\left(\frac{\alpha s-\beta}{\lambda}\right)ds}_{\alpha}-\underbrace{\int_0^1 s\left(\frac{\alpha s-\beta}{\lambda}\right)ds}_{\beta}=\alpha t-\beta\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)-\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}\right)=\lambda\alpha t-\lambda\beta.$$

Приравнивая коэффициенты при t и 1, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{2} - \beta = \lambda\alpha, \\ \dfrac{\alpha}{3} - \dfrac{\beta}{2} = \lambda\beta, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{1}{2} - \lambda\right) - \beta = 0, \\ \dfrac{\alpha}{3} - \beta\left(\dfrac{1}{2} + \lambda\right) = 0. \end{cases}$$

Так как собственная функция должна быть ненулевой, то последняя система уравнений имеет ненулевое решение только в том случае, когда определитель матрицы системы равен нулю, т.е. $-\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) + \frac{1}{3} = 0$, откуда в случае поля комплексных чисел находим собственное значение $\lambda = \pm\frac{i}{\sqrt{12}}$.

Пример 5.4. Найти собственные значения и собственные векторы дифференциального оператора $A : C^2[0,\pi] \to C[0,\pi]$, $Ax(t) = x''(t)$, $D(A) = \{x(t) \in C^2[0,\pi] : x(0) = x(\pi) = 0\}$ (над полем вещественных чисел).

Составим уравнение $Ax(t) = \lambda x(t) \Leftrightarrow x''(t) - \lambda x(t) = 0$. Так как $\lambda = const$, то приходим к краевой задаче $x''(t) - \lambda x(t) = 0$, $x(0) = x(\pi) = 0$ для однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - \lambda = 0$. Общее решение уравнения зависит от λ. Если $\lambda > 0$, то общее решение уравнения имеет вид $x(t) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}$. Исходя из условия $x(0) = x(\pi) = 0$, приходим к системе

$$x(0) = x(\pi) = 0 \Leftrightarrow C_1 e^{\sqrt{\lambda}\cdot 0} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\cdot 0} = 0,\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}\cdot\pi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\cdot\pi} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_1 + C_2 = 0,\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}\cdot\pi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\cdot\pi} = 0.$$

Данная система имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$, что означает, что при $\lambda > 0$ оператор дифференцирования не имеет собственных функций.

При $\lambda = 0$ приходим к краевой задаче $x''(t) = 0$, $x(0) = x(\pi) = 0$. Общее решение уравнения имеет вид $x(t) = C_1 + C_2 t$. Исходя из условия $x(0) = x(\pi) = 0$, получим

$$x(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 = 0,\ x(\pi) = C_1 + C_2 \cdot \pi = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0,\ C_2 = 0.$$

Значит, при $\lambda = 0$ оператор также не имеет собственных функций.

При $\lambda = -\alpha^2 < 0$ характеристическое уравнение $k^2 - \lambda = 0$ имеет корни $k = \pm\alpha i$ (i – мнимая единица). При этом общее решение имеет вид $x(t) = C_1\cos\alpha t + C_2\sin\alpha t$. Исходя из условия $x(0) = x(\pi) = 0$, приходим к системе уравнений

$$x(0) = x(\pi) = 0 \Leftrightarrow C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = 0,\ C_1\cos\alpha\pi + C_2\sin\alpha\pi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_1 = 0,\ C_2\sin\alpha\pi = 0.$$

Так как необходимо найти ненулевую собственную функцию вида $x(t)=C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t=C_2\sin\alpha t$, то необходимо, чтобы $\sin\alpha\pi=0$. Это возможно только в случае $\alpha\pi=\pi n\ (n\in Z)$, т.е. при $\alpha=n\ \ (n\in Z)$. Итак, оператор имеет собственные значения вида $\lambda=-\alpha^2=-n^2\ \ (n\in Z)$ при соответствующих собственных векторах $x_n(t)=\sin nt$.

5.3. Собственные значения и собственные векторы вполне непрерывного линейного оператора

Определение 5.2. Пусть $X-$банахово пространство над полем комплексных чисел C, $A:X\to X-$линейный вполне непрерывный оператор, т.е. $A\in\sigma(X)$. Пусть $\lambda\in C$ есть собственное значение оператора A, а множество $X_\lambda=\{x\in X:Ax=\lambda x\}=N(A-\lambda I)$ есть собственное подпространство, соответствующее собственному значению λ. Рассмотрим свойства собственных подпространств линейного вполне непрерывного оператора.

1) Собственное подпространство X_λ вполне непрерывного линейного оператора, отвечающее собственному значению $\lambda\neq0$, конечномерно.

2) Для любого числа $\varepsilon>0$ вне круга $|\lambda|\le\varepsilon$ в комплексной плоскости (вещественной оси) может содержаться только конечное число собственных значений оператора A.

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма $A:C[a,b]\to C[a,b]$, $(Ax)(t)=\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$ с непрерывным комплекснозначным ядром $K(t,s)$ в квадрате $t,s\in[a,b]^2$, который является вполне непрерывным оператором. Тогда задача на собственные значения имеет вид $\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds=\lambda x(t)$. При этом могут представиться три случая:

1) уравнение имеет только нулевое решение $x(t)=0$ при $\lambda\neq0$,

2) существует конечное число собственных значений оператора A, отличных от нуля,

3) существует бесконечно - малая последовательность $\{\lambda_n\}$ собственных значений оператора A, т.е. $\lambda_n\to0$ при $n\to\infty$.

При этом в случаях 2 и 3 собственные подпространства, отвечающие ненулевым собственным значениям, конечномерны. Рассмотрим пример, показывающий случай 3.

Пример 5.5. Найти собственные значения, отличные от нуля, и соответствующие собственные векторы интегрального оператора Фредгольма $A\in\sigma(C[0,\pi])$ с ядром $K(t,s)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt\sin ks}{k^2}$.

Составим уравнение $(Ax)(t)=\lambda x(t)$, т.е.

$$\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt\sin ks}{k^2}x(s)ds=\lambda x(t)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^2}\int_0^{\pi}\sin ks\cdot x(s)ds=\lambda x(t)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^2}\alpha_k=\lambda x(t)$, где обозначено $\alpha_k=\int_0^{\pi}\sin ks\cdot x(s)ds$.

При $\lambda\neq 0$: $x(t)=\lambda^{-1}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^2}\sin kt$. Учитывая вид функции $x(t)$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^2}\int_0^{\pi}\sin ks\cdot x(s)ds=\lambda x(t)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^2}\int_0^{\pi}\sin(ks)\cdot\lambda^{-1}\cdot\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\alpha_l}{l^2}\sin(ls)ds=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^2}\alpha_k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^2}\int_0^{\pi}\sin(ks)\cdot\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\alpha_l}{l^2}\sin(ls)ds=\lambda\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^2}\alpha_k.$$

Приравнивая коэффициенты при функции $\sin kt$, получаем $\int_0^{\pi}\sin(ks)\cdot\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\alpha_l}{l^2}\sin(ls)ds=\lambda\alpha_k$. Учитывая, что $\int_0^{\pi}\sin(ks)\sin(ls)ds=0$ при $k\neq s$, а при $k=s$: $\int_0^{\pi}\sin(ks)\sin(ls)ds=\int_0^{\pi}\sin^2(ks)ds=\frac{\pi}{2}$, получаем

$\int_0^{\pi}\sin(ks)\cdot\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\alpha_l}{l^2}\sin(ls)ds=\frac{\alpha_k}{k^2}\cdot\frac{\pi}{2}$, откуда

$\frac{\alpha_k}{k^2}\cdot\frac{\pi}{2}=\lambda\alpha_k\Leftrightarrow\alpha_k\left(\frac{1}{k^2}\cdot\frac{\pi}{2}-\lambda\right)=0\Leftrightarrow\lambda_k=\frac{\pi}{2k^2}$. Оператор имеет бесконечное множество собственных значений вида $\lambda_k=\frac{\pi}{2k^2}$, причем $\lambda_k\to 0$ при $k\to\infty$.

5.4. Собственные значения и собственные векторы вполне непрерывного самосопряженного линейного оператора

Пусть $H-$гильбертово пространство и $A:H\to H$ вполне непрерывный самосопряженный линейный оператор.

Теорема 5.1. 1) Каждый вполне непрерывный самосопряженный линейный оператор имеет по крайней мере одно собственное значение, отличное от нуля.

2) Все собственные значения вполне непрерывного самосопряженного линейного оператора вещественны и расположены на отрезке $[m,M]$, где $m=\inf\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$, $M=\sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$. Если $M\neq 0$, то M является наибольшим соб-

ственным значением оператора A. Если $m \neq 0$, то m является наименьшим собственным значением оператора A.

Следствие 1. Если $A: H \to H$ вполне непрерывный самосопряженный линейный оператор, то $\|A\| = |\lambda_1|$, где λ_1 –наибольшее по модулю собственное значение оператора.

Теорема 5.2 (Гильберт - Шмидт). Если $A: H \to H$ вполне непрерывный самосопряженный линейный оператор, то для всякого элемента $x \in H$ элемент $Ax \in H$ раскладывается в сходящийся ряд Фурье по ортонормированной системе собственных векторов оператора A.

5.5. Понятие спектра непрерывного линейного оператора

Определение 5.3. Число $\lambda \in P$ называется регулярным (правильным) значением линейного оператора $A: X \to X$, если оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим, т.е. $N(A - \lambda I) = \{\theta\}$, $R(A - \lambda I) = X$ и существует обратный непрерывный линейный оператор $(A - \lambda I)^{-1} \in L(X)$.

Определение 5.4. Множество $\rho(A)$ регулярных значений линейного оператора $A: X \to X$ называется резольвентным множеством. Таким образом, $\rho(A) = \left\{\lambda \in C:\ (A - \lambda I)^{-1} \in L(X)\right\}$.

Определение 5.5. Линейный ограниченный оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} \in L(X)$, определенный на $\rho(A)$, называется резольвентным оператором (резольвентой) оператора A.

Чтобы найти резольвентный оператор $R_\lambda(A)$, необходимо разрешить относительно элемента $x \in X$ уравнение $Ax - \lambda x = y$ для любого заданного элемента $y \in X$ в виде $x = (A - \lambda I)^{-1} y$, и выяснить, при каких $\lambda \in P$ оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ является непрерывным оператором.

В общем случае резольвента линейного оператора есть функция комплексной переменной $\lambda \in C$, значениями которой являются ограниченные линейные операторы.

Определение 5.6. Множество $\sigma(A) = P \setminus \rho(A)$ называется спектром оператора A.

Спектр $\sigma(A)$ делят на три части. Во-первых, в спектр входят все собственные значения $\lambda \in P$ оператора, так как уравнение $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = \theta$ имеет ненулевые решения (собственные элементы), поэтому $N(A - \lambda I) \neq \{\theta\}$ и значит, обратного оператора $(A - \lambda I)^{-1}$ вообще не существует. Собственные значения оператора образуют дискретный (точечный) спектр $\sigma_p(A)$.

Во-вторых, в спектр входят значения $\lambda \in P$, при которых обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ хоть и существует на некотором всюду плотном в X

множестве ($N(A-\lambda I)\neq\{\theta\}$), но является неограниченным, т.е. $(A-\lambda I)^{-1}\notin L(X)$; множество таких точек обозначается $\sigma_c(A)$ и называется непрерывным спектром.

В-третьих, в спектр входят элементы, в которых резольвентный оператор определен не на всюду плотном в X множестве. Такие точки образуют остаточный спектр $\sigma_r(A)$. Другими словами, остаточный спектр образуют те точки, которые не являются регулярными точками, точками дискретного спектра и точками непрерывного спектра.

Таким образом, $\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)$.

Отметим следующие важные факты о спектре, которые опираются на доказанные выше теоремы.

1. В конечномерном случае пространства спектр оператора дискретный и совпадает с множеством корней характеристического многочлена соответствующей матрицы этого оператора (непрерывный и остаточный спектры оператора есть пустые множества) и существование спектральных значений является следствием теоремы о существовании корня многочлена – основной теоремы алгебры.

2. В евклидовом (или унитарном) конечномерном пространстве размерности n всякий самосопряженный оператор имеет ровно n вещественных собственных значений с учетом их кратности, а из соответствующих им собственных векторов в пространстве можно составить ортонормированный базис.

3. Спектр вполне непрерывного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве состоит из не более, чем счетного множества собственных значений, единой предельной точкой которого может служить лишь точка нуль.

5.6. Примеры нахождения спектра линейного непрерывного оператора

Пример 5.6. Найти спектр и резольвенту дифференциального оператора, действующего в пространстве $X=C^1[a,b]$: $Ax(t)=x'(t)$, $D(A)=C^1[a,b]$.

Сначала найдем дискретный спектр $\sigma_p(A)$, решая уравнение $Ax=\lambda x$, т.е. уравнение $x'(t)=\lambda x(t)$. Его решением является функция $x(t)=Ce^{\lambda t}$, $C=const$. Очевидно, что значение C можно взять так, чтобы функция $x(t)$ была нетривиальной. Значит, любое значение $\lambda\in P$ есть собственное значение оператора, т.е. спектр $\sigma(A)=\sigma_p(A)=P$ есть дискретный спектр. Резольвентное множество $\rho(A)=\varnothing$, резольвента отсутствует.

Пример 5.7. Найти спектр и резольвенту оператора, действующего в пространстве $X=C^1[a,b]$: $Ax(t)=x'(t)$, $D(A)=\{x\in C^1[a,b]: x(a)=0\}$.

Как и в примере 5.6, общее решение уравнения $Ax=\lambda x$ имеет вид $x(t)=Ce^{\lambda t}$, $C=const$. Учитывая условие $x(a)=0$, получаем тривиальное решение: $x(a)=Ce^{\lambda\cdot a}=0\Leftrightarrow C=0$, $x(t)\equiv 0$. Значит, при каждом значении $\lambda\in P$: $x(t)\equiv 0$, т.е. дискретный спектр отсутствует, $\sigma_p(A)=\varnothing$.

Найдем резольвенту оператора, для чего найдем решение уравнения $Ax-\lambda x=y$, или эквивалентно задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$x'(t)-\lambda x(t)=y(t),\ x(a)=0.$$

Решим уравнение методом вариации. Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид $x(t)=Ce^{\lambda t}$ ($C=const$). Общее решение неоднородного уравнения находим в виде $x(t)=C(t)e^{\lambda t}$. Подставляя его в исходное уравнение, получаем

$$C'(t)e^{\lambda t}+C(t)\lambda e^{\lambda t}-\lambda C(t)e^{\lambda t}=y(t)\Leftrightarrow C'(t)=e^{-\lambda t}y(t)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C(t)=\int_a^t e^{-\lambda s}y(s)ds+C_1, C_1=const.$$

В итоге получаем общее решение

$$x(t)=C(t)e^{\lambda t}=\left(\int_a^t e^{-\lambda s}y(s)ds+C_1\right)e^{\lambda t}=\int_a^t e^{\lambda(t-s)}y(s)ds+C_1e^{\lambda t}, C_1=const.$$

Учитывая начальное условие $x(a)=0$, получаем $x(t)=\int_a^t e^{\lambda(t-s)}y(s)ds$.

Итак, для каждого $\lambda\in P$ и каждой функции $y(t)\in C^1[a,b]$ существует непрерывное решение уравнения $Ax-\lambda x=y$ в виде

$$x(t)=(A-\lambda I)^{-1}y(t)=\int_a^t e^{\lambda(t-s)}y(s)ds.$$

Так как ядро оператора $(A-\lambda I)^{-1}$ есть непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $e^{\lambda(t-s)}$, то оператор $A-\lambda I$ непрерывно обратим. Резольвентное множество $\rho(A)=P$, спектр $\sigma(A)=\varnothing$, резольвента $R_A(\lambda)=(A-\lambda I)^{-1}$.

Пример 5.8. Найти спектр и резольвенту оператора, действующего в пространстве $X=C^1[a,b]$: $Ax(t)=x'(t)$, $D(A)=\{x\in C^1[a,b]: x(a)=x(b)\}$ (над полем комплексных чисел).

Как в примере 5.7, общее решение уравнения $Ax=\lambda x$ имеет вид $x(t)=Ce^{\lambda t}$, $C=const$. Учитывая условие $x(a)=x(b)$, имеем

$$Ce^{\lambda\cdot a}=Ce^{\lambda\cdot b}\Leftrightarrow C\left(e^{\lambda\cdot a}-e^{\lambda\cdot b}\right)=0.$$

Значение C отлично от нуля только в том случае, когда $e^{\lambda\cdot a}=e^{\lambda\cdot b}$, т.е. при $\lambda a=\lambda b+2\pi ni,\ n\in\mathbf{Z}$ (учли условие периодичности функции e^z для комплексной переменной), откуда $\lambda = \frac{2\pi ni}{a-b}, n \in \mathbf{Z}$. Значит, дискретный спектр $\sigma_p(A) = \left\{ \frac{2\pi ni}{a-b}, n \in \mathbf{Z} \right\}$.

Найдем резольвенту, для чего найдем решение уравнения $Ax - \lambda x = y$, или эквивалентно краевую задачу для линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$x'(t) - \lambda x(t) = y(t),\ x(a) = x(b).$$

Аналогично примеру 2, получаем общее решение

$$x(t) = \int_a^t e^{\lambda(t-s)} y(s) ds + Ce^{\lambda t}, C = const.$$

Учитывая условие $x(a) = x(b)$, получаем $C = \frac{e^{\lambda b}}{e^{\lambda a} - e^{\lambda b}} \int_a^b e^{-\lambda s} y(s) ds$.

Итак, для каждого $\lambda \neq \frac{2\pi ni}{a-b}, n \in \mathbf{N}$ и каждой функции $y(t) \in C^1[a,b]$ существует непрерывное решение уравнения $Ax - \lambda x = y$ в виде

$$x(t) = (A - \lambda I)^{-1} y(t) = \int_a^t e^{\lambda(t-s)} y(s) ds + \left(\frac{e^{\lambda b}}{e^{\lambda a} - e^{\lambda b}} \int_a^b e^{-\lambda s} y(s) ds \right) e^{\lambda t}.$$

Так как ядро оператора $(A - \lambda I)^{-1}$ есть непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $e^{\lambda(t-s)}$, то оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим. Резольвентное множество $\rho(A) = \mathbf{C} \setminus \left\{ \frac{2\pi ni}{a-b}, n \in \mathbf{Z} \right\}$, спектр $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \left\{ \frac{2\pi ni}{a-b}, n \in \mathbf{Z} \right\}$, резольвента $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$.

Пример 5.9. Найти спектр и резольвенту оператора, действующего в пространстве $C[0,1]$: $Ax(t) = tx(t)$, $D(A) = C[0,1]$ (над полем вещественных чисел).

Уравнение $Ax = \lambda x$ имеет вид $tx(t) = \lambda x(t) \Leftrightarrow (t - \lambda) x(t) = 0$. Его решением является только тривиальная функция $x(t) \equiv 0$. Значит, у оператора нет собственных значений и собственных функций (точечный спектр пуст).

Если $\lambda \notin [0,1]$, то уравнение $tx(t) - \lambda x(t) = y(t)$ при заданной функции $y(t) \in [0,1]$ имеет единственное непрерывное на отрезке $t \in [0,1]$ решение $x(t) = (t - \lambda)^{-1} y(t)$. Значит, все точки $\lambda \notin [0,1]$ являются регулярными точками оператора, т.е. $\rho(\lambda) = \mathbf{R} \setminus [0,1]$, $R_A(\lambda) y(t) = (A - \lambda I)^{-1} y = (t - \lambda)^{-1} y(t)$.

Пусть $\lambda \in [0,1]$. В этом случае резольвентный оператор $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ определен не на всюду плотном в $X = C[0,1]$ множестве.

Значит, все точки $\lambda \in [0,1]$ есть точки остаточного спектра.

Пример 5.10. Найти спектр и резольвенту линейного оператора, действующего в l_1: $Ax = z = (z_1, z_2, ..., z_n, ...)$, $z_n = \dfrac{n+1}{n} x_n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_1$.

Сначала найдем дискретный спектр оператора. Для этого решаем уравнение $Ax = \lambda x$, т.е. систему уравнений $\dfrac{n+1}{n} x_n = \lambda x_n \Leftrightarrow \left(\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right) x_n = 0, n \in \mathbf{N}$. Если $\lambda \neq \dfrac{n+1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$, то данная система имеет только тривиальное решение. Если же $\lambda = \dfrac{n_0+1}{n_0}$ для некоторого натурального номера $n_0 \in \mathbf{N}$, то нетривиальное решение системы имеет вид $x = \left(0, 0, ...0, \underset{n_0}{\underset{\smile}{1}}, 0, 0, ...\right) \in l_1$ (единица стоит на месте с номером $n_0 \in \mathbf{N}$, остальные элементы – нули). Значит, для любого $\lambda = \dfrac{n+1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ уравнение $Ax = \lambda x$ имеет нетривиальное решение (собственный вектор) $x = \left(0, 0, ...0, \underset{n}{\underset{\smile}{1}}, 0, 0, ...\right)$, т.е. дискретный спектр $\sigma_p(A) = \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}_{n \in N}$.

Пусть $\lambda \notin \sigma_p(A)$. Для заданного элемента $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \in l_1$ решим уравнение $Ax - \lambda x = y$ относительно $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_1$, т.е. систему уравнений $\dfrac{n+1}{n} x_n - \lambda x_n = y_n, n \in \mathbf{N}$, откуда находим $x_n = \dfrac{y_n}{\left(\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right)}, n \in \mathbf{N}$, т.е. пока формально $x = (A - \lambda I)^{-1} y$.

Далее, так как $x \in l_1$, то необходимо, чтобы ряд $\|x\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|y_n|}{\left|\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right|}$ сходился. Пусть $d = \inf\limits_{n \in \mathbf{N}} \left|\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right|$, причем по свойству нижней грани $\left|\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right| > d$. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$, то если $\lambda \neq 1$, то $d > 0$ и $\|x\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|y_n|}{\left|\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right|} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|y_n|}{d} = \dfrac{1}{d} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|$.

Если же $\lambda = 1$, то обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ будет являться неограниченным, значит, точка $\lambda = 1$ есть точка непрерывного спектра: $1 \in \sigma_c(A)$.

Итак, при $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq \dfrac{n+1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ уравнение $Ax - \lambda x = y$ однозначно разрешимо относительно $x \in l_1$ для всякого $y \in l_1$ в виде $x = (A - \lambda I)^{-1} y$. При этом $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} \in L(l_1)$ ($\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq \dfrac{n+1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$) есть непрерывно обратимый линейный оператор (резольвента оператора A). Спектр оператора $\sigma(A) = \{1\} \cup \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}_{n \in \mathbf{N}}$.

Пример 5.11. Найти спектр и резольвенту линейного оператора, действующего в l_2: $Ax = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2$.

Сначала найдем дискретный спектр оператора. Для этого решим уравнение $Ax = \lambda x$, или систему уравнений

$$x_1 - x_2 = \lambda x_1,\ x_1 + x_2 = \lambda x_2,\ x_3 = \lambda x_3, \dots, x_n = \lambda x_n, \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)x_1 - x_2 = 0,\ x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0,\ (1-\lambda)x_3 = 0, \dots, (1-\lambda)x_n = 0, \dots$$

При $\lambda = 1$ система принимает вид

$$x_1 - x_2 = x_1,\ x_1 + x_2 = x_2,\ x_3 = x_3, \dots, x_n = x_n, \dots,$$

и имеет бесконечное множество решений $x = (0, 0, c_3, c_4, \dots, c_n, \dots) \in l_2$ таких, что ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$.

При $\lambda \neq 1$ система имеет нетривиальное решение только в том случае, когда определитель матрицы системы $(1-\lambda)x_1 - x_2 = 0,\ x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0$ равен нулю, т.е. при $(1-\lambda)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm i$. При этом система имеет два нетривиальных решения $x = (1, -i, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ и $x = (1, i, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. Итак, дискретный спектр $\sigma_p(A) = \{1,\ 1 \pm i\}$.

При $\lambda \notin \sigma_p(A) = \{1,\ 1 \pm i\}$ уравнение $Ax - \lambda x = y$, а значит, система

$$(1-\lambda)x_1 - x_2 = y_1,\ x_1 + (1-\lambda)x_2 = y_2,\ (1-\lambda)x_3 = y_3, \dots, (1-\lambda)x_n = y_n, \dots$$

однозначно разрешимо относительно $x \in l_2$ для всякого $y \in l_2$ в виде

$$x_1 = \frac{(1-\lambda)y_1 + y_2}{(1-\lambda)^2 + 1},\ x_2 = \frac{(1-\lambda)y_2 - y_1}{(1-\lambda)^2 + 1},\ x_3 = \frac{y_3}{1-\lambda}, \dots, x_n = \frac{y_n}{1-\lambda}, \dots$$

Значит, резольвента $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} \in L(l_2)$ ($\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq 1 \pm i$),

$$R_\lambda(A)y = \left(\frac{(1-\lambda)y_1 + y_2}{(1-\lambda)^2 + 1},\ \frac{(1-\lambda)y_2 - y_1}{(1-\lambda)^2 + 1},\ \frac{y_3}{1-\lambda}, \dots, \frac{y_n}{1-\lambda}, \dots \right).$$

Пример 5.12. Найти спектр и резольвенту оператора, действующего в пространстве $C[0,1]$: $Ax(t) = x(0) + (2t-1) \cdot x(1)$, $D(A) = C[0,1]$ (над полем комплексных чисел).

Составим уравнение $Ax(t) - \lambda x(t) = y(t)$ ($\lambda \neq 0$), т.е. уравнение

$x(0)+(2t-1)x(1)-\lambda x(t)=y(t)$, откуда формально найдем функцию $x(t)$:

$$x(t)=\frac{1}{\lambda}x(0)+\frac{1}{\lambda}x(1)(2t-1)-\frac{1}{\lambda}y(t).$$

Подставив в уравнение $x(0)+(2t-1)x(1)-\lambda x(t)=y(t)$ поочередно $t=0, t=1$, получим систему уравнений для определения значений $x(0),\ x(1)$:

$$\begin{cases} x(0)-x(1)-\lambda x(0)=y(0), \\ x(0)+x(1)-\lambda x(1)=y(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x(0)-x(1)=y(0), \\ x(0)+(1-\lambda)x(1)=y(1). \end{cases}$$

Решая ее по формулам Крамера, получаем

$$x(0)=\frac{1}{\Delta}\big((1-\lambda)y(0)+y(1)\big),\ x(1)=\frac{1}{\Delta}\big((1-\lambda)y(1)-y(0)\big),$$

где $\Delta=(1-\lambda)^2+1,\ \lambda\neq 1\pm i$. Таким образом, для каждой функции $y(t)\in C[0,1]$ и $\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0,1\pm i\}$ существует функция $x(t)=\frac{1}{\lambda}x(0)+\frac{1}{\lambda}x(1)(2t-1)-\frac{1}{\lambda}y(t)$, т.е. на множестве $\rho(A)=\mathbf{C}\setminus\{0,1\pm i\}$ определена резольвента

$$R_\lambda(A)y(t)=(A-\lambda I)^{-1}y(t)=\frac{1}{\lambda}x(0)+\frac{1}{\lambda}x(1)(2t-1)-\frac{1}{\lambda}y(t).$$

При этом спектр $\sigma(A)=\{0,1\pm i\}$. Выясним, является ли $\lambda=1+i$ точкой дискретного типа, для чего решим уравнение $Ax(t)-\lambda x(t)=0$, или уравнение $x(0)+(2t-1)x(1)-(1+i)x(t)=0$. Выражая из этого уравнения $x(t)$, получаем $x(t)=\alpha+\beta t$, где $\alpha=\frac{x(0)-x(1)}{1+i},\ \beta=\frac{2x(1)}{1+i}$ некоторые константы. При этом $x(0)=\alpha,\ x(1)=\alpha+\beta$. Тогда получаем систему и ее решение:

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{x(0)-x(1)}{1+i}, \\ \beta=\dfrac{2x(1)}{1+i}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{\alpha-(\alpha+\beta)}{1+i}, \\ \beta=\dfrac{2(\alpha+\beta)}{1+i}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\dfrac{\beta}{1+i}, \\ \alpha=\dfrac{\beta(i-1)}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\dfrac{\beta}{1+i}, \\ \beta\in\mathbf{C}. \end{cases}$$

Полагая $\beta=1+i$, получаем $\alpha=-1$ и функцию $x(t)=-1+(1+i)t$ - собственную функцию, отвечающую собственному значению $\lambda=1+i$.

Аналогично $\lambda=1-i$ и $x(t)=-1+(1-i)t$ есть собственное значение и собственная функция оператора.

При $\lambda=0$ имеем уравнение $Ax(t)=0\Leftrightarrow x(0)+(2t-1)x(1)=0$, которому удовлетворяют функции из бесконечномерного собственного подпространства $X_0=\{x(t)\in C[0,1]: x(0)=x(1)=0\}$.

Итак, имеем точечный спектр $\sigma(A)=\{0,1\pm i\}=\sigma_p(A)$.

5.7. Пример нахождения спектра линейного интегрального оператора

Пример 5.14. Найти спектр и резольвенту линейного оператора Фредгольма, действующего в пространстве $C[0,1]$: $Ax(t)=\int_0^1 tsx(s)ds$, где $x(t)\in C[0,1]$.

Найдем решение уравнения $Ax-\lambda x=y$ ($\lambda\neq 0$) относительно $x(t)\in C[0,1]$ при заданной $y(t)\in C[0,1]$, т.е. уравнение $t\int_0^1 sx(s)ds-\lambda x(t)=y(t)$. Выразив формально $x(t)$, имеем

$$x(t)=\lambda^{-1}t\int_0^1 sx(s)ds-\lambda^{-1}y(t).$$

Обозначая $\int_0^1 sx(s)ds=\alpha\in P$, получаем $x(t)=\alpha\lambda^{-1}t-\lambda^{-1}y(t)$. Умножая обе части этого равенства на t и интегрируя по t на $[0,1]$, получаем

$$tx(t)=\alpha\lambda^{-1}t^2-\lambda^{-1}ty(t)\Leftrightarrow\int_0^1 tx(t)dt=\alpha\lambda^{-1}\int_0^1 t^2dt-\lambda^{-1}\int_0^1 ty(t)dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha=\alpha\frac{1}{3\lambda}-\frac{1}{\lambda}\int_0^1 ty(t)dt\Leftrightarrow\alpha\left(1-\frac{1}{3\lambda}\right)=-\frac{1}{\lambda}\int_0^1 ty(t)dt\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{1-3\lambda}\int_0^1 ty(t)dt.$$

Подставляя найденное значение α в функцию $x(t)$, получаем

$$x(t)=\alpha\lambda^{-1}t-\lambda^{-1}y(t)=\left\{\frac{1}{\lambda(1-3\lambda)}\int_0^1 sy(s)ds\right\}t-\frac{1}{\lambda}y(t).$$

Из заданного представления видно, что $\rho(A)=\mathbf{R}\setminus\{0,\ 1/3\}$, резольвента $R_\lambda(A)y(t)=(A-\lambda I)^{-1}y(t)=\left\{\frac{1}{\lambda(1-3\lambda)}\int_0^1 sy(s)ds\right\}t-\frac{1}{\lambda}y(t)$, спектр $\sigma(A)=\{0,\ 1/3\}$.

Выясним, является ли значение $\lambda=1/3$ собственным значением оператора. Решим уравнение $Ax(t)=\frac{1}{3}x(t)$, т.е. уравнение $t\int_0^1 sx(s)ds=\frac{1}{3}x(t)$. Нетрудно убедиться, что решением этого уравнения является функция $x(t)\equiv t$. Значит, число $\lambda=1/3$ есть точка дискретного типа.

Задачи для самостоятельного изучения

Задача 5.1. Найти собственные значения и собственные векторы дифференциального оператора $A:C^1[0,\pi]\to C[0,\pi]$, $Ax(t)=x''(t)$, (числовое поле – поле вещественных чисел), если:

а) $D(A)=\{x(t)\in C^2[0,\pi]: x'(0)=x'(\pi)=0\}$;

б) $D(A)=\{x(t)\in C^2[0,\pi]: x(0)=x(\pi), x'(0)=x'(\pi)\}$;

в) $D(A)=\{x(t)\in C^2[0,\pi]: x(0)=x'(0)=0\}$;

г) $D(A)=\{x(t)\in C^2[0,\pi]: x(0)=-x(\pi), x'(0)=-x'(\pi)\}$.

Задача 5.2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $A: C[0,1]\to C[0,1]$, $Ax(t)=\int\limits_0^1 (3t-s)x(s)\,ds$.

Задача 5.3. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $A: C[0,1]\to C[0,1]$, $Ax(t)=\int\limits_0^1 ts(t-s)x(s)\,ds$ (над полем комплексных чисел).

Задача 5.4. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $A: C[0,1]\to C[0,1]$, $Ax(t)=\int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds$, если: а) $K(t,s)=ts$; б) $K(t,s)=e^{t-s}$; в) $K(t,s)=e^{t-s}$; г) $K(t,s)=3t^2s-5ts^2$; д) $K(t,s)=5t^2s-3ts^2$; е) $K(t,s)=t+s$; ж) $K(t,s)=\cos\pi(t+s)$.

Задача 5.5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $A: C[-\pi,\pi]\to C[-\pi,\pi]$, $Ax(t)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(t+s)x(s)\,ds$.

Задача 5.6. Найти спектр и резольвенту линейного оператора, действующего в l_1: $Ax=z=(z_1,z_2,\dots,z_n,\dots)$, $z_n=\dfrac{x_n}{n}$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)\in l_1$.

Задача 5.7. Найти спектр и резольвенту оператора, действующего в пространстве $X=C[0,1]$: $Ax(t)=t^{-1}x(t)$, $D(A)=\{x\in C^1[0,1]: x(0)=0\}$ (над полем вещественных чисел).

Задача 5.8. Найти спектр и резольвенту оператора, действующего в пространстве $X=C[0,2\pi]$: $Ax(t)=e^{-ti}x(t)$, $D(A)=C[0,2\pi]$ (над полем комплексных чисел).

Задача 5.9. Найти спектр и резольвенту оператора, действующего в пространстве $C[0,1]$: $Ax(t)=x(0)+t\cdot x(1)$, $D(A)=C[0,1]$ (над полем вещественных чисел).

Ответы и указания

5.1. а) $\lambda=0, x_0(t)=1$, $\lambda=-n^2, x_n(t)=\sin nt$ $(n\in\mathbf{N})$; б) $\lambda=0, x_0(t)=1$, $\lambda=-4n^2, x_0(t)\equiv 1, x_{1n}(t)=\cos 2\pi nt, x_{2n}(t)=\sin 2\pi nt$ $(n\in\mathbf{N})$;

в) нет собственных значений;

г) $\lambda=-(2n+1)^2, x_{1n}(t)=\cos(2n+1)t, x_{2n}(t)=\sin(2n+1)t$ $(n\in\mathbf{N})$.

5.2. Решение: составим уравнение $Ax(t)=\lambda x(t)$, т.е. уравнение

$$\int_0^1 (3t-s)x(s)ds=\lambda x(t) \Leftrightarrow 3t\int_0^1 x(s)ds-\int_0^1 sx(s)ds=\lambda x(t) \Leftrightarrow 3\alpha t-\beta=\lambda x(t),$$

где $\alpha=\int_0^1 x(s)ds, \beta=\int_0^1 sx(s)ds$. При $\lambda\neq 0$ $x(t)=\lambda^{-1}(3\alpha t-\beta)$. Подставляя функцию $x(t)$ в уравнение, получаем

$$3\alpha t-\beta=\lambda x(t) \Leftrightarrow 3t\underbrace{\int_0^1\left(\frac{3\alpha s-\beta}{\lambda}\right)ds}_{\alpha}-\underbrace{\int_0^1 s\left(\frac{3\alpha s-\beta}{\lambda}\right)ds}_{\beta}=3\alpha t-\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3t\left(\frac{3\alpha}{2}-\beta\right)-\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=3\lambda\alpha t-\lambda\beta.$$

Приравнивая коэффициенты при t и 1, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{3\alpha}{2}-\beta=\lambda\alpha,\\ \alpha-\dfrac{\beta}{2}=\lambda\beta,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\left(\dfrac{3}{2}-\lambda\right)-\beta=0,\\ \alpha-\beta\left(\dfrac{1}{2}+\lambda\right)=0.\end{cases}$$

Так как собственная функция должна быть ненулевой, то последняя система уравнений имеет ненулевое решение только в том случае, когда определитель матрицы системы равен нулю, т.е. $\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)+1=0$, откуда находим собственное значение $\lambda=0{,}5$. Подставляя $\lambda=0{,}5$ в систему уравнений, получаем $\alpha=\beta$. Поэтому множество собственных векторов имеет вид $x(t)=\lambda^{-1}(3\alpha t-\alpha)=2\alpha(3t-1), \alpha\in P$.

При $\lambda=0$ получаем бесконечномерное собственное подпространство

$$X_0=\left\{x(t):\ \int_0^1(3t-s)x(s)ds=0\right\}.$$

5.3. Собственные значения $\lambda=\pm\dfrac{i}{4\sqrt{15}}$.

5.4. а) $\lambda=\frac{1}{3}$, $x(t)=t$; б) $\lambda=\frac{1}{2}(e^2-1)$, $x(t)=e^t$; в) $\lambda=\frac{1}{2}(e^2-1)$, $x(t)=e^t$; г) $\lambda=-\frac{1}{4}$, $x(t)=t^2-t$; д) $\lambda=\frac{1}{4}$, $x(t)=5t^2-3t$;

е) $\lambda_1=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}$, $x_1(t)=2\sqrt{3}-3+6t, \lambda_2=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}$, $x_2(t)=3+2\sqrt{3}-6t$;

ж) $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $x_1(t)=\cos\pi t, \lambda_2=-\frac{1}{2}$, $x_2(t)=\sin\pi t$.

5.5. $\lambda_1=\pi$, $x_1(t)=\cos t, \lambda_2=-\pi$, $x_2(t)=\sin t$.

5.6. $\sigma(A)=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$, $R_\lambda(A)y=(A-\lambda I)^{-1}y=\left\{\left(\frac{1}{n}-\lambda\right)^{-1}y_n\right\}_n$.

5.7. $\sigma(A)=[1,+\infty)$.

5.8. $\sigma(A)=\{\lambda:|\lambda|=1\}$.

5.9. $R_\lambda(A)y(t)=-\frac{1}{\lambda}y(t)+\frac{1-\lambda-t}{\lambda(1-\lambda)^2}y(0)+\frac{t}{\lambda(1-\lambda)}y(1)$, $\rho(A)=\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$, $\sigma(A)=\sigma_d(A)=\{0,1\}$, при $\lambda=1$ собственная функция $x(t)\equiv1$, при $\lambda=0$ бесконечномерное собственное подпространство функций таких, что $x(0)=x(1)=0$. Указание: составить уравнение $Ax(t)-\lambda x(t)=y(t)$, т.е. уравнение $x(0)+tx(1)-\lambda x(t)=y(t)$, откуда формально $x(t)=\frac{1}{\lambda}x(0)+\frac{1}{\lambda}tx(1)-\frac{1}{\lambda}y(t)$. Подставить в уравнение поочередно $t=0,t=1$, откуда из соответствующей системы найти значения $x(0)$, $x(1)$.

Библиографический список

1. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Минск: Вышэйшая школа, 1978. – 208 с.
2. Бакушинский А.Б. Элементы функционального анализа : учеб. пособие / Бакушинский Анатолий Борисович, Худак Юрий Иосифович. – М. : Академия, 2011. - 188 с. ISBN 978-5-7695-6974-6 : 337-00.
3. Власова Е.А. Элементы функционального анализа : учеб. пособие / Е.А. Власова, И.К. Марчевский. – СПб.: Лань, 2015. — 400 с.
4. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967.
5. Городецкий В.В. Методы решения задач по функциональному анализу: учеб. пособие. - Киев: Вища шк., 1990. – 479 с.
6. Дерр В.Я. Функциональный анализ. Лекции и упражнения. – М.: Юрайт, 2012. – 464 с.
7. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ Колмогоров Андрей Николаевич, Фомин Сергей Васильевич. – М.:Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 316 с. - ISBN 5-93972-197-4 : 172-00.
8. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика : учеб. пособие. – Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2000. – 296 с.
9. Новиков А.И. Элементы функционального анализа : учеб.пособие / Новиков Анатолий Иванович. – Рязань: РГРТА, 1995.
10. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 498 с.
11. Треногин В.А. и др. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
12. Элементы функционального анализа: учеб. пособие / С.А. Нелюхин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань: РГРТУ, 2018. - 84 с.

Оглавление

Н е л ю х и н Сергей Александрович
С ю с ю к а л о в Андрей Иванович
С ю с ю к а л о в а Елена Александровна

Элементы функционального анализа: линейные операторы,
уравнения в банаховых пространствах

Редактор Н.А. Орлова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 28.03.19. Формат бумаги 60x84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,25.
Тираж 25 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.