

**VIII Межрегиональная студенческая физико-математическая
Олимпиада имени Г.Н. Шуппе
(II тур Всероссийской студенческой олимпиады)
Рязанский государственный радиотехнический университет
23 марта 2019 года**

Задача 1. Пусть для $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено: $f(x) + f(-x) = 1$. Вычислите интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x) \sin nx}{\sin x} dx$

Предложите примеры (за каждый пример могут быть начислены дополнительные баллы) для $f(x)$.

Задача 2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1-0} \left[(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \right]$.

Задача 3. Вычислить определитель

1	2	3	...	2017	2018	2019
2	1	2	...	2016	2017	2018
3	2	1	...	2015	2016	2017
...
2017	2016	2015	...	1	2	3
2018	2017	2016	...	2	1	2
2019	2018	2017	...	3	2	1

Задача 4. Найти геометрическое место точек $z \in \mathbb{C}$ удовлетворяющих уравнению $A|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$, где $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$, $A > 0$, $AC < |B|^2$.

Задача 5. Существуют ли функции функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)} ?$$

Задача 6. Из чисел $1, 2, \dots, 2n$ выбрать максимальное количество таких чисел, чтобы ни одно из них не делилось на другое.

Задача 7. Плоскость пересекает боковые ребра правильной пирамиды $TABCD$ в точках A', B', C', D' . При этом $A'A = 5$, $B'B = 10$, $C'C = 15$, $D'D = 14$. Найти длину боковых ребер.

Задача 8. Найти объём тела $A = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq xy\}$.

Задача 9. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n+n^2)}{n^2}$?

Задача 10. Даны точки $A(-9, -10)$, $B(1, 5)$ и $C(2, 1)$. На замкнутой ломаной \overline{ABCA} (границе треугольника ABC) найти точку, ближайшую к началу координат.

Задача 11. На покоящийся вначале груз пружинного маятника с коэффициентом упругости k и массой m в течение промежутка времени T действовала постоянная сила F в направлении растяжения пружины. Найти, в каком промежутке меняется амплитуда при изменении времени T действия силы.

Задача 12. На плоскости задана декартова система координат. В начальный момент времени частица находится в точке $O(0, 0)$. Каждую секунду частица смещается на 1 единицу в одном из 4 направлений (влево, вправо, вверх или вниз) с равной вероятностью. Найти вероятность того, что через 5 секунд частица окажется в точке $A(1, 2)$.

Задача 13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \arccos x \right) \frac{1}{x^3}$.