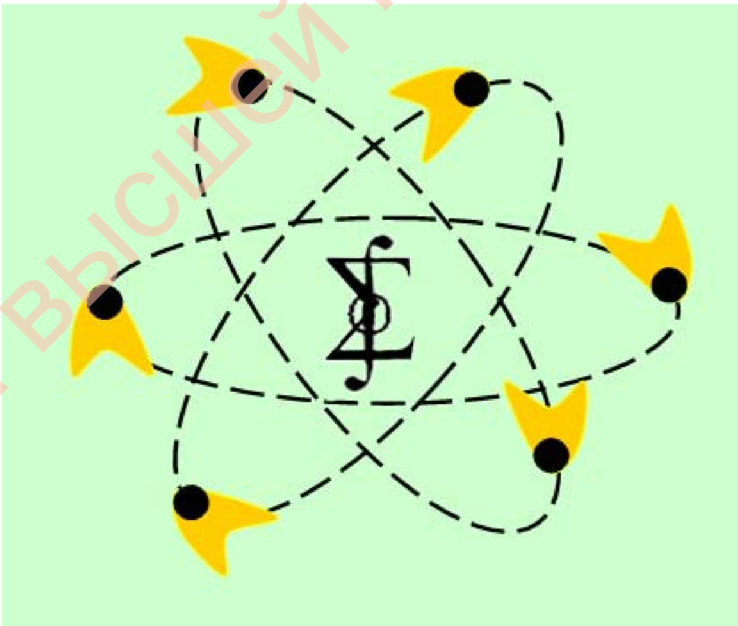
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Н. КОНЮХОВ,
А.Б. ДЮБУА,
А.С. САФОШКИН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Часть 2



Рязань 2018

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

А.Н. КОНЮХОВ,

А.Б. ДЮБУА,

А.С. САФОШКИН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Часть 2

Учебное пособие

Рязань 2018

УДК 519.766.2

Основы теории нечетких множеств. Часть 2: учеб. пособие / А.Н.Конюхов, А.Б.Дюбуа, А.С.Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2018. – 108 с.

Обсуждаются некоторые понятия и законы теории нечетких множеств и нечеткой логики. По каждому разделу приведены примеры решения типовых задач и предложены упражнения для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов специальностей 10.05.01 «Компьютерная безопасность», 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем», а также иных лиц, желающих изучить основы теории нечетких множеств и нечеткой логики.

Табл. 8. Ил. 19. Библиогр.: 26 назв.

Нечеткое множество, нечеткое число, функция принадлежности, принцип обобщения, нечеткое отношение, лингвистическая переменная, нечеткая логика, база нечетких правил, нечеткий вывод, система SISO, фаззификация, дефаззификация, система компьютерной математики

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензенты: кафедра автоматики и информационных технологий в управлении Рязанского государственного радиотехнического университета (профессор кафедры, д-р техн. наук В.К. Клочко); кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (доц., канд. физ.-мат. наук Г.С. Лукьянова)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения

Опр.	определение
Утв.	утверждение
►	начало решения примера, доказательства
◄	окончание решения примера, доказательства
U, V, X, Y	универсальные множества (универсумы)
$\varnothing$	пустое множество
$A, B, \ldots$	классические (обычные, четкие) множества
$\widetilde{A}, \widetilde{B}, \ldots$	нечеткие множества
$\mathcal{F}(U)$	совокупность всех нечетких множеств, заданных на U
$\tilde{a}$, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$	нечеткие числа
$\mathbb{R}_F$	множество всех действительных нечетких чисел
$\mu_{\widetilde{A}}(x)$	функция принадлежности нечеткого множества $\widetilde{A}$
$supp(\widetilde{A})$	носитель нечеткого множества
$core(\widetilde{A})$	ядро нечеткого множества
A_α , $(\widetilde{A})_\alpha$	α-сечение (α-срез) нечеткого множества
$height(\widetilde{A})$	высота нечеткого множества
$\widetilde{\mathfrak{R}}$, $\widetilde{\mathfrak{S}}$	нечеткие отношения
Δ	T-норма
∇	T-конорма (S-норма)
$\forall$	квантор всеобщности (любой, для всякого)
$\exists$	квантор существования (существует)
$\Rightarrow$	импликация (если… то…)
$\Leftrightarrow$	эквиваленция (равносильно; тогда и только тогда)
ЛП	лингвистическая переменная
НМ	нечеткое множество
НЧ	нечеткое число
ТНМ	теория нечетких множеств
ФП	функция принадлежности нечеткого множества

Предисловие

"Vagueness is no more to be done
away with in the world of logic
than friction in mechanics."
(Charles S. Pierce)

Настоящее издание является продолжением первой части учебного пособия «Основы теории нечетких множеств», вышедшей в 2017 году [4]. В ней были освещены преимущественно вопросы, касающиеся базовых понятий теории нечетких множеств (НМ), типологии функций принадлежности НМ, мер нечеткости, операций над НМ и свойств этих операций. Перечисленный набор сведений вполне достаточен для начального знакомства с теорией нечетких множеств как расширением классической математики. Если вдруг читатель не владеет указанными понятиями, то перед освоением настоящего пособия стоит ознакомиться с ними в первой части издания [4] или в любых других доступных источниках.

«The more, the fuzzier» (чем дальше, тем туманнее) – такой эпиграф носит книга «Fuzzy Sets And Systems Theory And Applications» известных классиков теории нечетких множеств D.Dubois & H.Prade [12]. В последние десятилетия мы стали свидетелями небывалого общественного прогресса, порождающего все более сложные задачи, для решения которых нужен усовершенствованный математический аппарат. Подобно тому, как при моделировании реальных механических систем невозможно пренебрегать трением, так и при решении многих современных проблем нам уже приходится учитывать и описывать неопределенность, присущую человеческому образу восприятия и мышления.

Во второй половине прошлого века произошла научная «революция» в математике – отказ от бинарного характера классической теории множеств. Это быстро привело к «удвоению» традиционной математики: постепенно многие давно известные нам математические объекты получили свое «нечеткое» расширение, обретя в свою очередь статус частного случая.

Чрезвычайно широкое и успешное применение аппарата теории нечетких множеств в науке и технике побудило нас к освещению некоторых положений этой области знаний в рамках второй части учебного пособия [4] на более глубоком уровне, необходимом современному инженеру.

В первых трех разделах пособия обсуждаются нечеткие числа как наиболее распространенные на практике виды числовых НМ. Сделана попытка в доступной форме на конкретных примерах изложить «принцип обобщения» Л.Заде, позволяющий распространить содержание операций, представленных в классическом курсе математики, на нечеткие числа. Достаточно подробно описана арифметика нечетких чисел в *LR*-представлении.

Четвертый раздел посвящен более сложным нечетким объектам – нечетким отношениям. Особое внимание уделено формам представления и свойствам бинарных нечетких отношений и их композиций, а также практическому использованию нечетких отношений при описании нечетких систем (композиционное правило вывода Л.Заде).

В пятом разделе освещаются основы нечеткой логики, рассматриваются разновидности нечетких отрицаний, *T*-норм и *T*-конорм, нечетких импликаций, правила нечеткого логического вывода – нечеткий и обобщенный «модус поненс».

Шестой раздел знакомит читателя с понятиями «нечеткая переменная», «лингвистическая переменная», дает представление об общей структуре и функционировании системы нечеткого логического вывода как совокупности базы нечетких правил и правила вывода.

Седьмой раздел посвящен изучению особенностей построения и работы нечетких систем типа Mamdani (Мамдани) и Takagi – Sugeno (Такаги – Сугено). После знакомства с данным разделом читатель, вероятно, сможет более или менее разобраться, как «работает» нечеткая математика в фаззи-контроллерах.

Как и в первой части пособия, в настоящем издании большинство теоретических положений подкрепляется наглядными примерами. Наиболее значимые утверждения сопровождаются доказательствами. В конце каждого раздела содержатся вопросы и практические упражнения для самостоятельной работы студентов.

1. НЕЧЕТКИЕ ЧИСЛА

Напомним, что *нечеткое множество* (НМ) $\widetilde{A}$ – это совокупность всех пар следующего вида: $\widetilde{A} = \{< x, \mu_{\widetilde{A}}(x) >\}$, где $x \in U$ (универсальное множество или «универсум»), а функция $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ называется *функцией принадлежности* (ФП) элементов x множеству $\widetilde{A}$, причем $0 \le \mu_{\widetilde{A}}(x) \le 1$. Значение функции принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ на конкретном элементе $x \in U$ называется *степенью принадлежности* элемента x нечеткому множеству $\widetilde{A}$.

В ряде источников вместо термина «нечеткое множество» употребляется «нечеткое подмножество универсального множества *U*», что более корректно. Мы же в целях простоты восприятия будем пользоваться первым вариантом. Как и ранее, будем обозначать нечеткие множества заглавными буквами латинского алфавита с «тильдой», тем самым отличая их от обычных четких множеств.

Обратите внимание, что элементами НМ могут быть произвольные объекты, что определяется характером универсума. Однако самыми простыми и удобными для нас являются числа, в силу чего широкое практическое распространение получили нечеткие множества, задаваемые на числовых универсумах и называемые кратко нечеткими числами.

Одними из первых понятие *нечеткое число* (*НЧ*) предложили в своей статье «Операции над нечеткими числами» D.Dubois & H.Prade [13].

Потребность в таком инструменте, как нечеткие числа, естественным образом возникает тогда, когда при описании нечетких сущностей используются числовые оценки. Например, высказывания типа «расстояние примерно три километра», «вес около двух килограммов», «в районе 15 часов» и т.п. можно рассматривать как нечеткие числа [15].

Прежде чем сформулировать определение НЧ, вспомним понятие выпуклого нечеткого множества.

***Опр.* 1.1.** *Выпуклое нечеткое множество* (*convex fuzzy set*) – это нечеткое множество $\widetilde{A}$, функция принадлежности которого удовлетворяет условию

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) \ge \min(\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{A}}(x_3)),$$

$$\forall \lambda \in [0,1],\ \forall x_1, x_3 \in supp(\widetilde{A}).$$

Отличие выпуклого НМ от невыпуклого проиллюстрировано на рис. 1.1. Выпуклое нечеткое множество обладает тем свойством, что все его α-сечения A_α являются связными одноинтервальными подмножествами на носителе НМ $supp(\widetilde{A})$ (рис. 1.1, *а*). У невыпуклого множества существуют несвязные α-сечения, состоящие из двух и более непересекающихся областей (рис. 1.1, *б*).

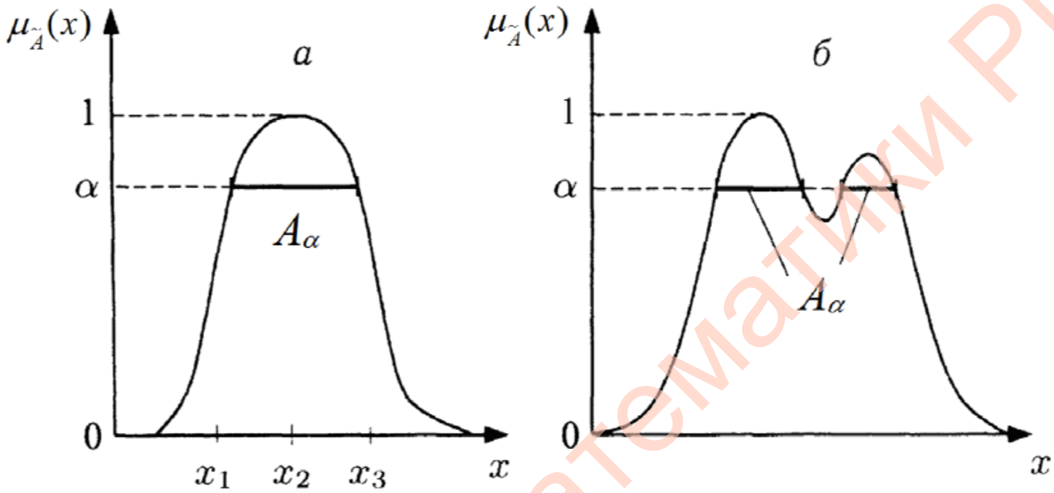


Рис. 1.1. Примеры выпуклого (*а*) и невыпуклого (*б*) нечетких множеств

Если читатель испытывает затруднения в понимании базовых терминов теории нечетких множеств (функция принадлежности, носитель, ядро, α-сечение и др.), рекомендуем обратиться к части первой одноименного учебного пособия [4].

***Опр.* 1.2.** *Нечетким числом* (*fuzzy number*, *FN*, *НЧ*) называется нечеткое множество $\widetilde{A}$, заданное своей функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ на универсуме $U = \mathbb{R}$ – множестве всех действительных чисел, удовлетворяющее, по меньшей мере, следующим трем свойствам:

1) $\widetilde{A}$ – нормальное НМ, то есть его высота $height(\widetilde{A}) = 1$;

2) $\widetilde{A}$ – выпуклое НМ (см. опр. 1.1);

3) носитель НМ $\widetilde{A}$, т.е. $supp(\widetilde{A})$ – ограниченное множество.

Заметим, что в наиболее ранних определениях нечетких чисел добавлялось еще требование унимодальности функции принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}(x)$. Делалось это с целью разграничения понятий «нечеткое число» и «нечеткий интервал». В настоящее время это требование принято опускать: например, нечеткий интервал типа «от 2 до 3» также трактуется как нечеткое число.

Вместе с тем не стоит думать, что определение 1.2 носит догматический характер. Вовсе нет! Так, например, в некоторых случаях смягчают требование 3, рассматривая и нечеткие числа с неограниченным носителем. Вообще полезно помнить, что ТНМ – молодая отрасль знаний, поэтому в ответ на новые вызовы происходит адекватное уточнение или даже расширение ее понятийного аппарата.

Нечеткие числа будем обозначать строчными буквами латинского алфавита с «тильдой» $\tilde{a}$ или $\tilde{u}$, чтобы отличать их от нечетких множеств в более общем понимании.

***Опр.* 1.3.** Нечеткое число $\tilde{u}$ называется *положительным* (*отрицательным*), если $\mu_{\tilde{u}}(x)=0,\ \forall x<0\ (\forall x>0)$.

Интересно, что из определения 1.3 вытекает, что существуют такие НЧ, которые не являются ни положительными, ни отрицательными. И это существенная особенность, отличающая НЧ от обычных действительных чисел.

Также имеются особенности в сравнении нечетких чисел. Например, ясно, что однозначно ответить на вопрос о том, какое из чисел $\tilde{u}$ или $\tilde{v}$ больше, можно тогда и только тогда, когда их носители – непересекающиеся множества. В противном случае требуются более сложные алгоритмы сравнения, учитывающие характер взаимного расположения ФП $\mu_{\tilde{u}}(x)$ и $\mu_{\tilde{v}}(x)$. В зависимости от решаемой задачи применяется или даже разрабатывается заново адекватный проблеме подход. В качестве иллюстрации приведем два определения равенства НЧ.

***Опр.* 1.4.** Нечеткие числа $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ называют *равными* и пишут $\tilde{u}=\tilde{v}$, если $\mu_{\tilde{u}}(x)=\mu_{\tilde{v}}(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

***Опр.* 1.5.** Нечеткие числа $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ называют *приближенно равными* и пишут $\tilde{u}\approx\tilde{v}$, если ближайшие к ним четкие множества совпадают. Напомним, что множество A, ближайшее к данному НМ $\tilde{u}$, имеет характеристическую функцию

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, \text{ если } 0{,}5<\mu_{\tilde{u}}(x)\le 1\\ 0, \text{ если } 0\le\mu_{\tilde{u}}(x)\le 0{,}5.\end{cases}$$

Классификацию нечетких чисел обычно приводят по виду ФП. Рассмотрим наиболее распространенные виды НЧ.

Наипростейшие нечеткие числа – *треугольные* НЧ (рис. 1.2, *а*) и *трапециевидные* НЧ (рис. 1.2, *б*). Представлены они следующими функциями принадлежности, которые могут быть как симметричными, так и несимметричными в зависимости от особенностей моделируемой области:

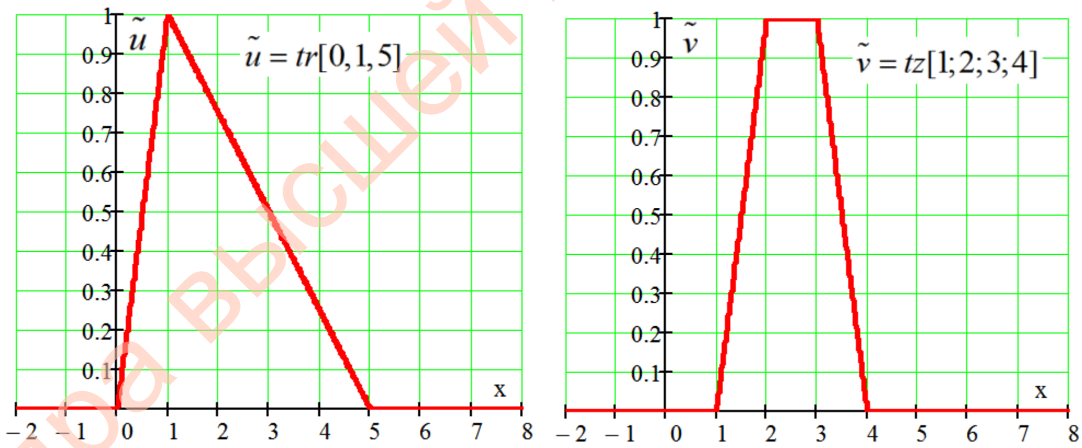
- *треугольное* (*triangle*, *tr*) НЧ

$$tr[a;m;b](x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{m-a}, & \text{если } a\le x\le m\\ \dfrac{x-b}{m-b}, & \text{если } m<x\le b\\ 0, & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

- *трапециевидное* (*trapezoid*, *tz*) НЧ

$$tz[a;m;n;b](x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{m-a}, & \text{если } a\le x\le m\\ 1, & \text{если } m<x<n\\ \dfrac{x-b}{n-b}, & \text{если } n\le x\le b\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Для трапециевидного числа естественно полагаем $m\ne n$, так как в противном случае трапециевидное НЧ вырождается в треугольное.



а *б*

Рис. 1.2. Нечеткие числа: треугольное (*а*) и трапециевидное (*б*)

Полезно знать, что треугольное и трапециевидное НЧ можно описать в более компактной форме:

$$tr[a;m;b](x)=\max\left(\min\left(\frac{x-a}{m-a},\frac{x-b}{m-b}\right),0\right);$$

$$tz[a;m;n;b](x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{m-a}, 1, \frac{x-b}{n-b}\right), 0\right),$$

что оказывается весьма удобным при описании таких нечетких чисел в системах компьютерной математики.

Заметим, что в ранних исследованиях треугольные НЧ относились к нечетким числам, в то время как трапециевидные НЧ – к *нечетким интервалам*. Позже эти понятия отождествили. Нетрудно убедиться, что как треугольные, так и трапециевидные НЧ удовлетворяют всем требованиям, перечисленным в определении 1.2.

Функции принадлежности треугольных НЧ унимодальные, поэтому они обычно используются для представления нечетких чисел типа «приблизительно m».

Функции принадлежности трапециевидных НЧ не являются унимодальными, вследствие чего их применяют для описания нечетких чисел интервального характера, например «приблизительно в диапазоне от m до n».

Пример 1.1. Предложить способ описания выражения «расстояние около двух километров», используя симметричное треугольное нечеткое число.

► В качестве одного возможного из бесконечного количества вариантов предложим НЧ $\tilde{u}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = tr[1,7;\ 2;\ 2,3](x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x-2|}{0,3}, & \text{если } 1,7 \le x \le 2,3 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Интерпретация параметров этого числа: наиболее ожидаемое значение расстояния $x = 2$, «нечеткость» составляет 0,3 км, что отражает возможное индивидуальное восприятие расстояния некоторым человеком. Выбор константы «нечеткости» определяется особенностями предметной области моделирования, интуицией исследователя.◄

Бесспорным достоинством треугольных и трапециевидных НЧ является простота их аналитического задания. Это облегчает выполнение различных манипуляций над ними, например нахождение α-сечений, при помощи которых непрерывное нечеткое множество *дискретизируется*, то есть сводится к совокупности четких множеств. Как выяснится в последующих разделах, именно над такими НЧ проще всего выполнять арифметические операции.

Пример 1.2. Вывести аналитическое выражение для произвольного α-сечения треугольного нечеткого числа.

► Вспомним, что *α-сечением (α-срезом, подмножеством α-уровня, α-cut)* нечеткого множества $\widetilde{A}$ называют четкое множество A_α, состоящее из тех и только тех элементов универсального множества *U*, у которых степень принадлежности множеству $\widetilde{A}$ не менее *α*, т.е. $A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Иногда в этом определении используют строгое неравенство $\mu_{\widetilde{A}}(x) > \alpha$ и тогда говорят о строгом *α*-сечении.

Решая неравенство $\mu_{\tilde{u}}(x) \geq \alpha$ для функции принадлежности треугольного числа $\tilde{u} = tr[a,m,b]$, получаем выражения для координат левого x_L и правого x_R концов отрезка *α*-сечения:

$$\frac{x_L - a}{m - a} = \alpha \Leftrightarrow x_L - a = \alpha(m - a),$$

откуда

$$x_L = a + \alpha(m - a).$$

Аналогично

$$\frac{x_R - b}{m - b} = \alpha \Leftrightarrow x_R - b = \alpha(m - b),$$

откуда

$$x_R = b + \alpha(m - b).$$

То есть

$$u_\alpha = [a + \alpha(m - a),\ b + \alpha(m - b)],\ \ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

В правильности расчетов легко убедиться: полагая $\alpha = 0$, получаем носитель нечеткого числа $\tilde{u}$ – отрезок $[a,\ b]$; полагая $\alpha = 1$, получаем ядро НЧ $\tilde{u}$ – единственную точку $\{m\}$. ◄

Из недостатков НЧ треугольного и трапециевидного типа отметим, прежде всего, их несоответствие второй и последующей аксиомам Шваба [3, 4] в силу того, что функция принадлежности не является гладкой в характерных точках кривой.

На практике широкое применение нашли НЧ *колоколообразного* типа (*bell shaped* FN).

Рассмотрим квадратичное НЧ (*quadratic, q*) (рис. 1.3), задаваемое на носителе $[a,b] \subset \mathbb{R}$ системой условий:

$$q[a;l;m;r;b](x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a-x}{a-l}\right)^2, \text{ если } a\le x\le l\\ 1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m-x}{m-l}\right)^2, \text{ если } l<x\le m\\ 1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m-x}{m-r}\right)^2, \text{ если } m<x\le r\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b-x}{b-r}\right)^2, \text{ если } r<x\le b.\end{cases}$$

Безусловным достоинством заданной таким образом функции принадлежности квадратичного НЧ является ее гладкость во всех точках носителя (конечно, если речь идет о симметричном случае).

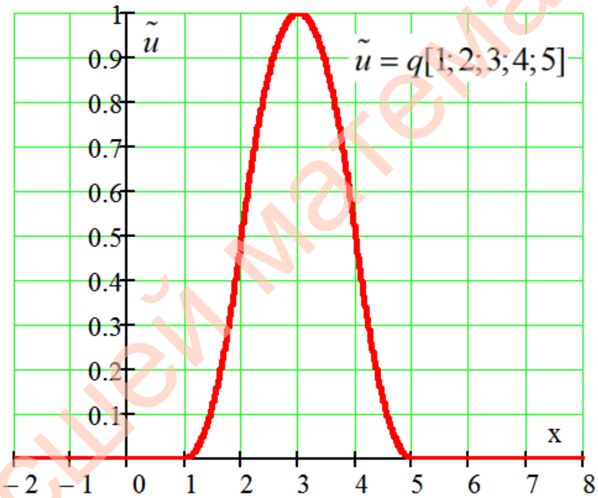


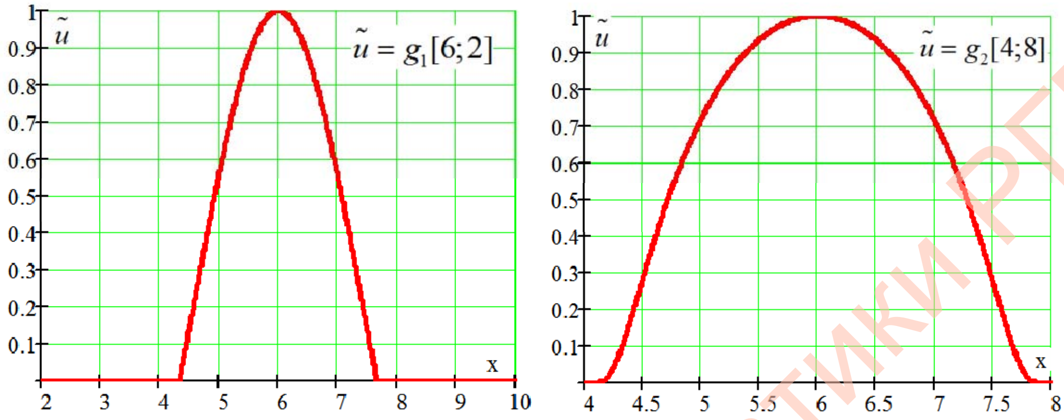
Рис. 1.3. Квадратичное нечеткое число $\tilde{u}=q[1;2;3;4;5]$

Вместо квадратичных НЧ могут быть использованы и другие колоколообразные НЧ. Например, *гауссово* НЧ (рис. 1.4, *а* – гауссово НЧ первого типа). Параметр *a* предполагается положительным и задает «степень нечеткости» числа:

$$g_1[m;a](x)=\begin{cases}2\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-m}{a}\right)^2}-1, \text{ если } m-a\sqrt{\ln 2}\le x\le m+a\sqrt{\ln 2}\\ 0 \text{ иначе.}\end{cases}$$

Недостатком гауссова НЧ первого типа является потеря гладкости на концах носителя. Однако такого изъяна лишено гауссово число второго типа с непрерывно-дифференцируемой функцией принадлежности во всех точках носителя (рис. 1.4, *б*):

$$g_2[a;b](x)=\begin{cases}\exp\left[1-\dfrac{(b-a)^2}{4(b-x)(x-a)}\right], \text{ если } a<x<b\\ 0 \quad \text{иначе.}\end{cases}$$



а *б*

Рис. 1.4. Гауссово нечеткое число: *а* – первого типа; *б* – второго типа

Возможны и другие варианты нечетких чисел, описываемых различными типовыми функциями принадлежности [4].

Пример 1.3. Получить выражение для произвольного α-сечения гауссова нечеткого числа третьего типа с функцией принадлежности

$$g_3[u,\, a,\, \delta](x)=\begin{cases}\exp\left(-\left(\dfrac{x-u}{a}\right)^2\right), \text{ если } u-\delta\le x\le u+\delta\\ 0 \quad \text{иначе.}\end{cases}$$

► Решая уравнение $g_3[u,\, a,\, \delta](x)=\alpha$ при $a>0,$ получаем выражения для левого x_L и правого конца x_R отрезка α-сечения:

$$\exp\left(-\left(\frac{x_L-u}{a}\right)^2\right)=\alpha \Leftrightarrow \left(\frac{x_L-u}{a}\right)^2=-\ln\alpha \Leftrightarrow x_L=u-a\sqrt{-\ln\alpha},$$

аналогично $x_R=u+a\sqrt{-\ln\alpha},\ (0<\alpha\le 1).$ Следовательно,

$$A_\alpha=\begin{cases}[u-a\sqrt{-\ln\alpha},\ u+a\sqrt{-\ln\alpha}], \text{ если } \exp\left(-\left(\dfrac{\delta}{a}\right)^2\right)\le\alpha\le 1\\ [u-\delta,\ u+\delta], \text{ если } 0\le\alpha<\exp\left(-\left(\dfrac{\delta}{a}\right)^2\right).\end{cases}$$

Получено α-сечение заданного нечеткого числа.◄

Иногда возникает необходимость в терминах теории нечетких множеств задать обычное «четкое» (*crisp*) число. Для этого предусмотрены так называемые *импульсные* НЧ (*нечеткий синглтон, fuzzy singleton*). Такое число можно рассматривать как предельный случай треугольного или трапециевидного НЧ, как, например, $\tilde{u} = tr[a,a,a]$ (рис. 1.5). Принято следующее обозначение нечеткого синглтона:

$$\chi\{x_0\} = tr[x_0, x_0, x_0] = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_0 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

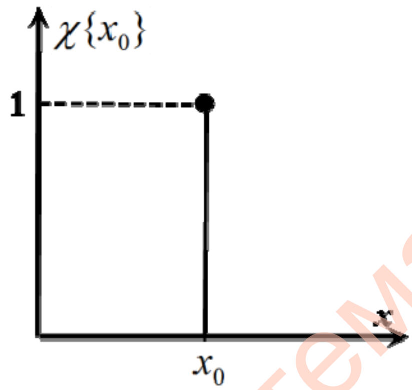


Рис. 1.5. Импульсное НЧ (обычное действительное число x_0)

Рассмотрим теперь особую разновидность нечетких чисел – так называемые нечеткие числа *LR*-типа, которые были введены с целью упрощения операций над НЧ [19].

***Опр.* 1.6.** *Нечеткое число LR-типа (LR – fuzzy number)* $\tilde{u}$ – это нечеткое число с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right), & \text{если } x \in [a,b] \\ 1, & \text{если } x \in (b,c) \\ R\left(\dfrac{x-d}{c-d}\right), & \text{если } x \in [c,d] \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $L(t), R(t) : [0,1] \to [0,1]$ – две некоторые непрерывные неубывающие функции, удовлетворяющие граничным условиям $L(0) = R(0) = 0$ и $L(1) = R(1) = 1$. Эти функции называют *функциями формы* (*shape functions*).

Из определения 1.6 следует, что носитель числа *LR*-типа – отрезок $[a,d]$, а ядро – отрезок $[b,c]$.

Обозначают *LR*-числа как $\tilde{u} = [a, b, c, d]_{LR}$ или, если число унимодально, просто $\tilde{u} = [a, b, c]_{LR}$. Иногда первый вариант нечеткого числа называют нечетким интервалом *LR*-типа, а второй собственно нечетким числом *LR*-типа. Нетрудно видеть, что рассмотренные нами в начале раздела треугольное и трапециевидное НЧ являются частными случаями чисел *LR*-типа.

Пример 1.4. Представить в виде числа *LR*-типа нечеткое положительное число «приблизительно 5».

► Реализуем при помощи программы MathCad две возможные модели НЧ «приблизительно 5»: в виде нечеткого унимодального *LR*-числа (рис. 1.6, *а*) и в виде нечеткого *LR*-интервала (рис. 1.6, *б*).

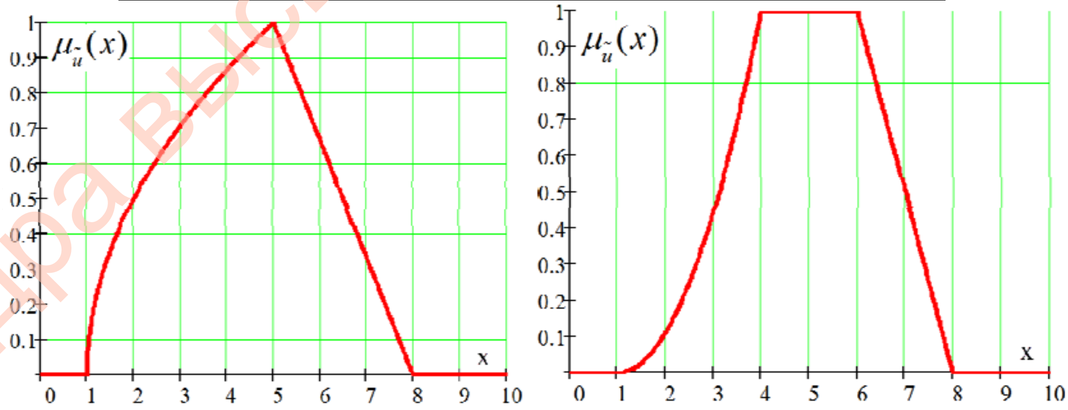
В первом случае в рабочем листе MathCad введем

$$L(x) := \sqrt{x} \quad R(x) := x \quad a := 1 \quad b := 5 \quad c := 5 \quad d := 8$$

$$\mu u(x) := \begin{vmatrix} L\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) \ \text{if } a \le x \le b \\ 1 \ \text{if } b < x < c \\ R\left(\dfrac{x-d}{c-d}\right) \ \text{if } c \le x \le d \\ 0 \ \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

Во втором случае первую строку заменим на

$$L(x) := x^2 \quad R(x) := x \quad a := 1 \quad b := 4 \quad c := 6 \quad d := 8$$



а *б*

Рис. 1.6. *LR*-числа из примера 1.4: *а* – унимодальное НЧ *LR*-типа; *б* – нечеткий интервал *LR*-типа

Как мы видим, использование *LR*-представления значительно повышает гибкость при конструировании нечетких чисел: мы можем независимо друг от друга «управлять» левыми и правыми ветвями функции принадлежности. ◄

В частности, существенно проще находить α-сечения чисел LR-типа, что иллюстрирует следующий пример.

Пример 1.5. Получить выражение для произвольного α-сечения нечеткого числа LR-вида, полагая, что функции L и R имеют обратные (имеет место в случае их строгой монотонности).

► Обозначая α-сечение в виде промежутка $u_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$, решаем последовательно два уравнения:

$$L\left(\frac{u_\alpha^- - a}{b-a}\right) = \alpha \Rightarrow \frac{u_\alpha^- - a}{b-a} = L^{-1}(\alpha) \Rightarrow u_\alpha^- = a + (b-a)L^{-1}(\alpha),$$

$$R\left(\frac{u_\alpha^+ - d}{c-d}\right) = \alpha \Rightarrow \frac{u_\alpha^+ - d}{c-d} = R^{-1}(\alpha) \Rightarrow u_\alpha^+ = d - (d-c)R^{-1}(\alpha),$$

где $L^{-1}(t)$ и $R^{-1}(t)$ – обратные функции по отношению к функциям $L(x)$ и $R(x)$ соответственно. ◄

Завершая знакомство с НЧ, отметим, что теория нечетких чисел постоянно развивается и дополняется. В данном разделе мы рассматривали преимущественно LR-числа как наиболее распространенные и простые в обращении. Читатель в целях расширения кругозора может самостоятельно ознакомиться с так называемым LU-представлением нечетких чисел [23]. Еще одно интересное направление исследований– задача аппроксимации нечетких чисел трапециевидными и другими видами нечетких чисел [7].

Вопросы и упражнения к разделу 1

1. Дайте определение нечеткого числа. Приведите примеры нечетких множеств, являющихся нечеткими числами и не являющихся таковыми.
2. Докажите, что нечеткое множество $\widetilde{A}$, заданное на универсуме $U \subset \mathbb{R}$, является выпуклым (в смысле определения 1.1) тогда и только тогда, когда все его α-сечения A_α являются связными одноинтервальными подмножествами на носителе $supp(\widetilde{A})$.

3. Покажите, что треугольные и трапециевидные нечеткие числа удовлетворяют всем трем перечисленным в определении 1.2 требованиям.
4. Придумайте две – три ситуации, для описания которых целесообразно было бы использовать нечеткие числа (треугольные, трапециевидные, другие). В каждом случае запишите выражения функций принадлежности НЧ, изобразите их графически.
5. Выясните, при каких условиях функция принадлежности квадратичного нечеткого числа $q[a;l;m;r;b]$ является гладкой на всем носителе (т.е. имеет во всех точках носителя непрерывную производную первого порядка). Каково в таком случае положение точек перегиба функции принадлежности?
6. Являются ли нечеткими числами (в смысле определения 1.2) следующие нечеткие множества:

а) $\tilde{u} = \frac{0,3}{1} + \frac{0,8}{2} + \frac{0,9}{3} + \frac{0,8}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,4}{6}$,

б) $\tilde{u}:\ \mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} |\sin 2x|, \text{ если } x \in [0,\pi] \\ 0 \text{ иначе,} \end{cases}$

в) $\tilde{u}:\ \mu_{\tilde{u}}(x) = \left(1 + \left(\frac{x-m}{d}\right)^2\right)^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

г) $\tilde{u}:\ \mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\dfrac{x-m}{d}\right)}{\dfrac{x-m}{d}}, \text{ если } m - \pi d < x < m + \pi d \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$

7. Запишите выражения для произвольных α-сечений нечетких чисел типа *tz*, *q*, g_1, g_2.
8. Рассчитайте и сравните индексы нечеткости треугольного и квадратичного нечетких чисел с одинаковыми носителями (вспомнить понятие «индекс нечеткости» и методику его расчета можно, заглянув в главу 5 части 1 пособия [4]).
9. Задайте *LR*-числа, описывающие нечеткие понятия «в районе пяти», «приблизительно от шести до семи». В чем вы видите преимущества и недостатки нечетких чисел *LR*-типа?

10. Пусть функции формы $L(x) = R(x) = x^a,\ a > 0$. Запишите функцию принадлежности соответствующего *LR*-числа и выведите выражения для его α-сечений.
11. Пусть некоторое нечеткое число $\tilde{u}$ имеет α-сечения вида $[e + e^{\alpha}, 4e - e^{\alpha^2}],\ 0 \le \alpha \le 1$. Найдите его функцию принадлежности $\mu_{\tilde{u}}(x)$ и постройте график.
12. Исследуйте методами математического анализа и постройте график функции принадлежности гауссова нечеткого числа $\tilde{u}$, записанного в *LR*-виде:

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < x_1 - a\sigma_1 \\ \exp\left(-\dfrac{(x - x_1)^2}{2\sigma_1^2}\right), \text{ если } x_1 - a\sigma_1 \le x < x_1 \\ \exp\left(-\dfrac{(x - x_1)^2}{2\sigma_2^2}\right), \text{ если } x_1 \le x < x_1 + a\sigma_2 \\ 0, \text{ если } x_1 + a\sigma_2 \le x. \end{cases}$$

Объясните смысл параметров этого числа.

2. ПРИНЦИП ОБОБЩЕНИЯ

Определив понятие нечеткого числа, мы подошли к одной из самых существенных проблем теории нечетких множеств. Мы прекрасно знаем все об операциях над обычными (четкими) действительными числами уже из начального курса математики: умеем их складывать, умножать, делить, извлекать корни и т.д. Все это настолько привычно, что мы даже не задумываемся над сущностью производимых действий. А как быть с нечеткими числами?

Пусть, например, мы собираемся построить математическую модель следующей простой ситуации. Примерно в 15-00 у нас запланирован выезд за покупками. Для того чтобы добраться на общественном транспорте от дома до супермаркета, потребуется около 40 минут (в зависимости от загруженности дороги); время на покупки – около часа. В обратный путь возьмем такси, которое доставит нас примерно за 15-30 минут (в зависимости от интенсивности дорожного трафика, который меняется во времени). Сколько примерно времени потребуется в целом для шопинга?

Можно предложить различные способы решения этой задачи, но наиболее «прозрачный» – в нечетких числах. Если мы обозначим нечеткие числа $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$, $\tilde{t}_3$ соответственно как времена поездки «туда», закупки товаров, поездки «обратно», то результатом решения задачи будет нечеткое число $\widetilde{T} = \tilde{t}_1 + \tilde{t}_2 + \tilde{t}_3$.

Ясно, что функция принадлежности НЧ $\widetilde{T}$ будет зависеть от вида и параметров функций принадлежности слагаемых. Но вот что самое главное: для получения результата нам придется обосновать и задать конкретные правила сложения НЧ. В более сложных задачах может возникнуть потребность и в применении иных арифметических операций, а также в функциональных преобразованиях нечетких чисел.

Возникает вопрос: можно ли распространить (расширить) уже известные математические операции над обычными четкими числами так, чтобы они были применимы и к нечетким числам? Да, можно. И впервые это было реализовано одним из основателей ТНМ L.Zadeh, предложившим так называемый «*принцип обобщения (расширения) Заде*» (*Zadeh's Extension Principle*).

***Опр.* 2.1.** *Принцип обобщения Заде* (одномерный случай). Пусть задано классическое действительное отображение $f : X \to Y$, где $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ – обычные (четкие) множества. Пусть $\widetilde{A}$ – некоторое нечеткое подмножество множества X. Отображение $\widehat{f}$ называется *нечетким обобщением отображения* f, если его действие на $\widetilde{A}$ порождает нечеткое подмножество $\widetilde{B} = \widehat{f}(\widetilde{A}) \subset Y$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \mu_{\widehat{f}(\widetilde{A})}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\widetilde{A}}(x), \text{ если } f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0, \text{ если } f^{-1}(y) = \varnothing, \end{cases}$$

где $f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$ – прообраз элемента y.

Иногда $\widehat{f}$ называют *расширением Заде* отображения f.

Напомним, что наименьшая из верхних границ непустого ограниченного сверху множества называется точной верхней гранью этого множества и обозначается sup (от лат. «supremum» – самый высокий). В некоторых публикациях и учебниках sup заменяют на max, что в подавляющем большинстве случаев равносильно.

Сначала рассмотрим простейший случай, когда отображение $f: X \to Y$ является инъекцией X в Y, то есть когда любые различные элементы-прообразы множества X имеют различные образы во множестве Y. Такого рода отображение называют еще взаимнооднозначным. Очевидно, что в этом случае

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\hat{f}(\tilde{A})}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y)).$$

Практически, если отображение f инъективно, а нечеткое множество имеет дискретный носитель

$$\tilde{A} = \sum_{x_i \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i},$$

то нечеткий образ $\hat{f}\left(\tilde{A}\right)$ множества $\tilde{A}$

$$\hat{f}\left(\tilde{A}\right) = \hat{f}\left(\sum_{x_i \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}\right) = \sum_{y_i \in Y} \frac{\mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y_i))}{y_i},$$

где $y_i = f(x_i)$.

Аналогично для НМ с непрерывным носителем

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x},$$

нечеткий образ, порождаемый инъективным отображением, есть

$$\hat{f}\left(\tilde{A}\right) = \hat{f}\left(\int_{x \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}\right) = \int_{y \in Y} \frac{\mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y))}{y},$$

где $y = f(x)$.

Пример 2.1. Пусть имеется неотрицательное НЧ $\tilde{u}$ «приблизительно ноль», описываемое несимметричной треугольной ФП

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{ если } x \in [0,1] \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Используя принцип обобщения, найти квадрат данного числа, то есть нечеткое число $\tilde{u}^2$.

► Так как отображение $y = f(x) = x^2$ ($x \in [0,1] \to y \in [0,1]$) является инъекцией при $x \in [0,1]$, то, пользуясь принципом расширения в простейшей его форме, сразу записываем ФП нечеткого числа $\tilde{u}^2$:

$$\mu_{\tilde{u}^2}(y) = \mu_{\tilde{u}}(f^{-1}(y)) = \mu_{\tilde{u}}(\sqrt{y}) = \begin{cases} 1-\sqrt{y}, \text{ если } y \in [0,1] \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases} \blacktriangleleft$$

Пример 2.2. Используя принцип обобщения, записать функции принадлежности: 1) числа $-\tilde{u}$ (НЧ, противоположное данному по знаку), если $\tilde{u}$ является числом определенного знака; 2) $(\tilde{u})^{-1}$ (НЧ, обратное данному), если $0 \notin supp(\tilde{u})$.

► Так как при сделанных предположениях отображения инъективны, то

$$1)\ \mu_{-\tilde{u}}(y) = \mu_{\tilde{u}}(f^{-1}(y)) = \mu_{\tilde{u}}(-y);$$

$$2)\ \mu_{(\tilde{u})^{-1}}(y) = \mu_{\tilde{u}}(f^{-1}(y)) = \mu_{\tilde{u}}\left(\frac{1}{y}\right). \blacktriangleleft$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда отображение может оказаться неинъективным.

Пример 2.3. Пусть задано целое нечеткое число $\tilde{u}$ «около нуля»

$$\tilde{u} = \frac{0,1}{-3} + \frac{0,2}{-2} + \frac{0,6}{-1} + \frac{1}{0} + \frac{0,7}{1} + \frac{0,3}{2} + \frac{0,1}{3}$$

и задано отображение $f: X \to Y$, где $y = f(x) = x^2$. Найти образ $\tilde{v} = \hat{f}(\tilde{u})$.

► Обозначим $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ – носитель множества $\tilde{A}$, который отображается при помощи функции $y = f(x) = x^2$ во множество $Y = \{0,1,4,9\}$ – носитель множества $\tilde{v} = \hat{f}(\tilde{u})$. Нетрудно видеть, что данное отображение не является взаимно однозначным.

В соответствии с принципом обобщения, записанным в виде определения 2.1, получим

$$\tilde{v} = \frac{1}{0} + \frac{\max(0,6;0,7)}{1} + \frac{\max(0,2;0,3)}{4} + \frac{\max(0,1;0,1)}{9},$$

то есть

$$\tilde{v} = \frac{1}{0} + \frac{0,7}{1} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,1}{9}.$$

Пояснение: так как у образа $y = 1$ два различных прообраза: $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$, то по принципу обобщения элементу $y = 1$ назначается максимальная из степеней принадлежности x_1 и x_2. Аналогичные рассуждения справедливы для элементов $y = 4$ и $y = 9$. ◄

Рассмотрим пример, в котором носитель НЧ непрерывный, а отображение $f: X \to Y$ не является инъекцией.

Пример 2.4. Пусть задано нечеткое число $\tilde{u}$ – «приблизительно ноль», описываемое несимметричной треугольной ФП вида

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = tr[-4;\, 0;\, 2](x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{4}, \text{ если } -4 \le x \le 0 \\ 1 - \dfrac{x}{2}, \text{ если } \ 0 < x \le 2 \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

и задано отображение $f: X \to Y$, где $y = f(x) = x^2$. Найти образ нечеткого числа $\tilde{u}$ при данном отображении, то есть функцию принадлежности НЧ $\tilde{u}^2$.

► Изобразим ФП заданного в примере НЧ на рис. 2.1.

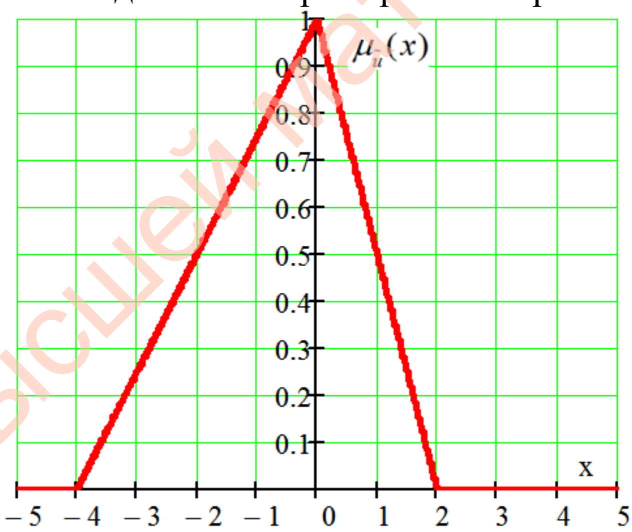


Рис. 2.1. ФП нечеткого числа из примера 2.4

Множество $X = [-4;\, 2]$, то есть носитель нечеткого числа $\tilde{u}$ отображается во множество $Y = [0;\, 16]$ – носитель нечеткого числа $\tilde{u}^2$. Ясно, что промежутки $[-2;\, 0]$ и $[0;\, 2]$ отображаются в один и тот же промежуток $[0;\, 4]$. Будем рассматривать два аналитических выражения $\mu_{\tilde{u}}(x)$, приведенных для удобства по аргументу к одному промежутку $x \in [0;\, 2]$. Для этого в первом выражении заменим x на

$-x$, а затем выберем одно из двух выражений в соответствии с критерием максимума степеней принадлежности:

$$\sup_{\substack{x \in f^{-1}(y) \\ y \in [0,4]}} \mu_{\tilde{u}}(x) = \sup_{0 \le x \le 2} \left\{ 1 - \frac{x}{4}, 1 - \frac{x}{2} \right\} = \sup_{0 \le x \le 2} \left\{ 1 - \frac{x}{4} \right\}.$$

Отсюда следует, что именно левая ветвь $\mu_{\tilde{u}}(x)$ будет определять степени принадлежности НЧ $\tilde{u}^2$ на промежутке $y \in [0; 4]$.

На отрезке $y \in [4; 16]$ результат определяется также левой ветвью ФП $\mu_{\tilde{u}}(x)$:

$$\sup_{\substack{x \in f^{-1}(y) \\ y \in [4,16]}} \mu_{\tilde{u}}(x) = \sup_{2 \le x \le 4} \left\{ 1 - \frac{x}{4}, 0 \right\} = \sup_{2 \le x \le 4} \left\{ 1 - \frac{x}{4} \right\}.$$

С учетом того, что для функции $y = f(x) = x^2$ обратная функция $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, имеем

$$\mu_{\tilde{u}^2}(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sqrt{y}}{4}, & \text{если } 0 \le y \le 16, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

График функции принадлежности полученного НЧ – «приблизительно 0^2» изображен на рис. 2.2. ◄

Рис. 2.2. К примеру 2.4. Функция принадлежности НЧ «приблизительно 0^2»

В процессе рассмотрения примера 2.4 возникает закономерный вопрос: а нельзя ли как-нибудь упростить процедуру нахождения образа нечеткого множества по принципу обобщения, если отображение является сложным и неоднозначным? Оказывается, можно. Достаточно вспомнить, что любое НЧ можно аппроксимировать в виде совокупности α-сечений с любой необходимой степенью дискретности. При этом всякое α-сечение, являясь обычным «четким» множеством, будет отображаться по обычным классическим правилам математики. В частности, справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *α-уровневый принцип обобщения.* Пусть $f : X \to Y$ - непрерывное отображение, $\tilde{u}$ – нечеткое число, заданное на носителе X. Тогда для всех $0 \le \alpha \le 1$ имеет место $\left[\widehat{f}(\tilde{u})\right]_\alpha = f\left(u_\alpha\right)$.

Иными словами, α-сечения образа $\widehat{f}(\tilde{u})$ совпадают с образами α-сечений, полученными в результате действия непрерывного отображения f. Проще говоря, нахождение образа НЧ методом α-сечений сводится к классической задаче нахождения образа отрезка. Требование непрерывности здесь существенно.

Доказательство утверждения может быть построено на основе теоремы Вейерштрасса о непрерывной на компакте функции. Ознакомиться с ним можно, например, в [5].

Пример 2.5. Рассмотрим нечеткое число $\tilde{u}$, заданное следующей функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} 4(x - x^2), \text{ если } 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Найти образ НЧ $\tilde{u}$, если отображение $f : X \to Y$ имеет вид $y = f(x) = \sqrt{x}$.

► Решим задачу двумя способами.

Способ 1. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ отображает носитель нечеткого числа $\tilde{u}$ – отрезок $X = [0; 1]$ в отрезок $Y = [0; 1]$, причем взаимно однозначным образом. Следовательно, функция принадлежности образа нечеткого числа $\tilde{u}$ при отображении $\widehat{f}$, то есть $\sqrt{\tilde{u}}$, будет

$$\mu_{\sqrt{\tilde{u}}}(y) = \mu_{\tilde{u}}(f^{-1}(y)) = \mu_{\tilde{u}}(y^2) = \begin{cases} 4(y^2 - y^4), \text{ если } y \in [0,1] \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Способ 2. Найдем выражения для α-сечений исходного НЧ $\tilde{u}$, $u_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$, решив при $0 \le \alpha \le 1$ уравнение $\mu_{\tilde{u}}(x) = 4(x - x^2) = \alpha$.

Имеем $x^2 - x + \dfrac{\alpha}{4} = 0$, следовательно,

$$u_\alpha^- = x_1 = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\alpha}\right), \quad u_\alpha^+ = x_2 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right),$$

то есть $u_\alpha = \left[\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\alpha}\right), \dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)\right]$ – искомое α-сечение.

Отображение непрерывно, поэтому так как функция $f(x) = \sqrt{x}$ монотонно возрастает на X, то левый конец промежутка u_α будет отображаться в левый конец промежутка $(\sqrt{\tilde{u}})_\alpha$, а правый – в правый:

$$(\sqrt{\tilde{u}})_\alpha = f(u_\alpha) = \left[f\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\alpha}\right)\right), f\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)\right)\right] =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\alpha}\right)},\ \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)}\right].$$

Построим в одной системе координат график функции принадлежности исходного НЧ $\tilde{u}$, а также НЧ $\sqrt{\tilde{u}}$, полученного первым и вторым способом при α от 0 до 1 с шагом 0,1 (рис. 2.3).

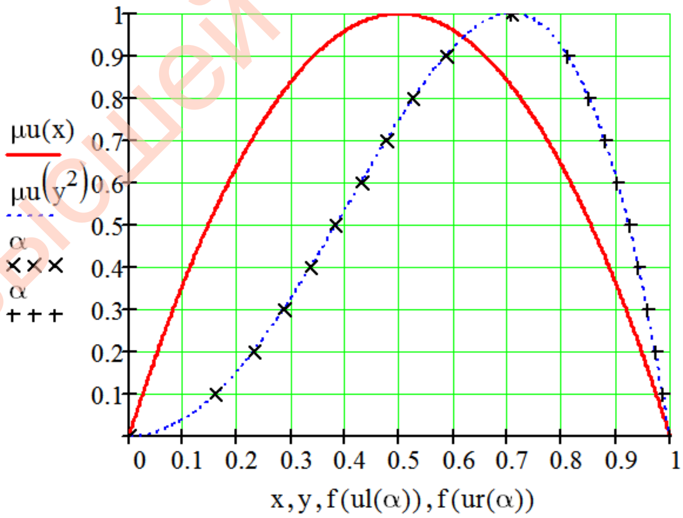


Рис. 2.3. К примеру 2.5. Исходное число $\tilde{u}$ – сплошная линия; НЧ $\sqrt{\tilde{u}}$ – пунктирная линия; левые концы α-сечений числа $\sqrt{\tilde{u}}$ обозначены знаком $\times$, правые $+$

Как видим, результаты совпадают. Для увеличения точности нахождения образа методом α-сечений степень дискретизации α необходимо наращивать. Ясно, что без использования средств вычислительной техники это сделать крайне сложно. В частности для решения данного примера вторым способом применялась система компьютерной математики MathCad.◄

Таким образом, принцип обобщения позволяет вычислять значения произвольных функций от нечетких чисел. Вместе с тем наиболее распространенные на практике треугольные и трапециевидные числа в результате функциональных преобразований, вообще говоря, далеко не всегда отображаются в числа того же типа. Проиллюстрируем сказанное примером.

Пример 2.6. Имеется треугольное нечеткое число $\tilde{u}$:

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = tr[1,2,4](x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{4-x}{2}, & \text{если } 2 < x \le 4 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти образ $\widehat{f}(\tilde{u})$ числа $\tilde{u}$, если отображение задается функцией вида $f(x) = e^x / x$.

► Получить решение непосредственно по принципу обобщения затруднительно, так как не представляется возможным аналитически выразить обратную функцию $f^{-1}(y)$.

Вновь применим α-уровневый принцип обобщения (см. утверждение), для чего сначала найдем α-сечения заданного числа $\tilde{u}$, $u_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$, решив при $0 \le \alpha \le 1$ уравнение $\mu_{\tilde{u}}(x) = \alpha$.

Имеем

$$u_\alpha^- = 1+\alpha,$$

$$\frac{4-u_\alpha^+}{2} = \alpha \Leftrightarrow u_\alpha^+ = 4-2\alpha,$$

то есть $u_\alpha = [1+\alpha,\ 4-2\alpha]$.

Так как функция $f(x) = e^x / x$ монотонно возрастает на носителе $\tilde{u}$ (предлагаем читателю самостоятельно убедиться в этом), то левый конец промежутка u_α будет отображаться в левый конец промежутка $(\widehat{f}(\tilde{u}))_\alpha$, а правый – в правый:

$$(\widehat{f}(\tilde{u}))_\alpha = \left[\frac{e^{1+\alpha}}{1+\alpha},\ \frac{e^{4-2\alpha}}{4-2\alpha}\right].$$

Изобразим в одной системе координат график функции принадлежности исходного треугольного числа $\tilde{u}$, а также его образа по α-сечениям при α от 0 до 1 с шагом 0,05 (рис. 2.4).

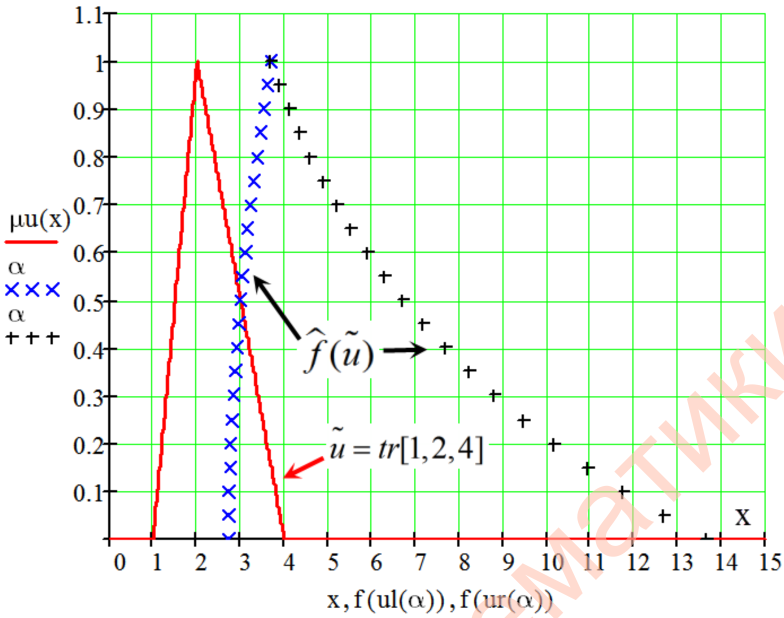


Рис. 2.4. К примеру 2.6. Исходное число $\tilde{u}$ – сплошная линия; НЧ – образ $\widehat{f}(\tilde{u})$, изображен при помощи α-сечений (левые концы сечений обозначены знаком $\times$, правые $+$)

Нетрудно видеть на рис. 2.4, что образ треугольного числа уже не является треугольным числом, оно получилось нелинейным. ◄

Перейдем к рассмотрению принципа обобщения для двумерного случая.

***Опр.* 2.2.** Пусть задано классическое (четкое) отображение вида $f : X \times Y \to Z$, где $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$ – обычные (четкие) множества, а $X \times Y$ - их декартово произведение. Пусть $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ – некоторые нечеткие подмножества X и Y соответственно. Отображение $\widehat{f}$ называется *нечетким обобщением* отображения f, если его действие на $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ дает нечеткое подмножество $\tilde{C} = \widehat{f}(\tilde{A}, \tilde{B}) \subset Z$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{C}}(z) = \mu_{\widehat{f}(\tilde{A},\tilde{B})}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\right), \text{если } f^{-1}(z) \neq \varnothing \\ 0, \text{если } f^{-1}(z) = \varnothing, \end{cases}$$

где $f^{-1}(z) = \{(x, y) \mid f(x, y) = z\}$ – прообразы z.

Определение 2.2 в целом похоже на определение 2.1. Добавляется лишь операция минимум (min), используемая для вычисления степеней принадлежности элементов декартового произведения нечетких подмножеств.

Пример 2.7. Пусть отображение $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ задано как $f(x,y)=x+y$. Имеется два НМ с конечными дискретными носителями на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$:

$$\widetilde{A}=\frac{0,2}{2}+\frac{0,6}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0,7}{5}+\frac{0,3}{6};\quad \widetilde{B}=\frac{0,1}{4}+\frac{0,7}{5}+\frac{1}{6}+\frac{0,8}{7}+\frac{0,2}{8}.$$

Найти нечеткое множество – образ $\widetilde{C}=\widehat{f}(\widetilde{A},\widetilde{B})$.

► Составим декартово произведение $\widetilde{A}\times\widetilde{B}$ множеств, вычисляя степени принадлежности $\min\left(\mu_{\widetilde{A}}(x),\,\mu_{\widetilde{B}}(y)\right)$ элементов $\widetilde{A}\times\widetilde{B}$, а также значения функции $f(x,y)=x+y$ на них. Расчеты удобно оформить в виде таблицы, ячейки которой имеют формат $(x+y)\,|\min\left(\mu_{\widetilde{A}}(x),\,\mu_{\widetilde{B}}(y)\right)$:

$\widetilde{A}$ / $\widetilde{B}$	2	3	4	5	6
4	6 | 0,1	7 | 0,1	8 | 0,1	9 | 0,1	10 | 0,1
5	7 | 0,2	8 | 0,6	9 | 0,7	10 | 0,7	11 | 0,3
6	8 | 0,2	9 | 0,6	10 | 1,0	11 | 0,7	12 | 0,3
7	9 | 0,2	10 | 0,6	11 | 0,8	12 | 0,7	13 | 0,3
8	10 | 0,2	11 | 0,2	12 | 0,2	13 | 0,2	14 | 0,2

Имеем:

$$\widetilde{C}=\widehat{f}(\widetilde{A},\widetilde{B})=\frac{0,1}{6}+\frac{\max(0,1;0,2)}{7}+\frac{\max(0,1;\,0,6;\,0,2)}{8}+$$

$$+\frac{\max(0,1;\,0,7;\,0,6;\,0,2)}{9}+\frac{\max(0,1;\,0,7;\,1,0;\,0,6;\,0,2)}{10}+$$

$$+\frac{\max(0,3;\,0,7;\,0,8;\,0,2)}{11}+\frac{\max(0,3;\,0,7;\,0,2)}{12}+$$

$$+\frac{\max(0,3;\,0,2)}{13}+\frac{0,2}{14};$$

$$\widetilde{C}=\frac{0,1}{6}+\frac{0,2}{7}+\frac{0,6}{8}+\frac{0,7}{9}+\frac{1}{10}+\frac{0,8}{11}+\frac{0,7}{12}+\frac{0,3}{13}+\frac{0,2}{14}. \blacktriangleleft$$

Наконец, приведем самую общую формулировку принципа обобщения.

***Опр.* 2.3.** *Принцип обобщения Заде* (многомерный случай). Пусть задано классическое (четкое) отображение $f: X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$, где $X_i, Y \subseteq \mathbb{R}$ – обычные (четкие) множества, а $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ – декартово произведение. Пусть $\widetilde{A}_i$ - некоторые нечеткие подмножества множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ соответственно. Отображение $\widehat{f}$ называется *нечетким обобщением* отображения f, если его действие порождает нечеткое подмножество $\widetilde{B}=\widehat{f}(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_n) \subset Y$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{B}}(y)=\begin{cases} \sup\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\in f^{-1}(y)} \min\left(\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1),\ldots,\mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)\right), \text{ если } f^{-1}(y)\neq\varnothing \\ 0, \text{ если } f^{-1}(y)=\varnothing, \end{cases}$$

где $f^{-1}(y)=\left\{(x_1,\ldots,x_n) \middle| f(x_1,\ldots,x_n)=y\right\}$ – прообразы элементов y.

Из вышеизложенного следует, что принцип обобщения Заде определяет общую концепцию операций в нечеткой алгебре. Вместе с тем принципу присущи существенные вычислительные трудности. Ясно, что если отображение не является однозначным, а нечеткие множества представлены достаточно сложными ФП, то без применения вычислительной техники выполнять операции весьма затруднительно. Как выход из ситуации, можно дискретизировать исходное множество, применяя α-разрезы, однако при этом произойдет потеря информации. Можно пойти и по другому пути – модифицировать сам принцип обобщения с учетом дополнительных ограничений конкретной задачи.

Вопросы и упражнения к разделу 2

1. Запишите принцип обобщения Заде в одномерной, двумерной и многомерной формулировках.
2. Запишите α-уровневый принцип обобщения.
3. Каковы, на ваш взгляд, недостатки принципа обобщения Заде?

4. Пусть на универсуме $U=\{1,2,3,4,5\}$ задано нечеткое множество $\widetilde{A}=\frac{0}{1}+\frac{0,5}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0,5}{4}+\frac{0}{5}$. Найдите нечеткий образ $\widetilde{B}=\widehat{f}(\widetilde{A})$, если $f(x)=4x-1$.
5. Нечеткое множество
$$\widetilde{A}=\frac{0,2}{-4}+\frac{0,4}{-3}+\frac{0,6}{-2}+\frac{0,8}{-1}+\frac{1}{0}+\frac{0,8}{1}+\frac{0,5}{2}+\frac{0,3}{3}+\frac{0,1}{4}$$
задано на универсуме $U=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$. Найдите нечеткий образ $\widetilde{B}=\widehat{f}(\widetilde{A})$, если $f(x)=2x^2-3x+1$.
6. Задано нечеткое число $\tilde{u}$, описываемое трапециевидной функцией принадлежности $\mu_{\tilde{u}}(x)=tz[-2;0;1;2](x)$. Пользуясь принципом обобщения, найдите его образ, если отображение $f:X\to Y$ задано как $y=f(x)=|x|$. Изобразите функции принадлежности прообраза $\tilde{u}$ и образа $|\tilde{u}|$ в одной системе координат.
7. Решите предыдущее задание при помощи α-уровневого принципа обобщения. Результат представьте графически и сравните с ранее полученным.
8. Имеются два нечетких подмножества с конечными дискретными носителями на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$:
$$\widetilde{A}=\frac{0,2}{-4}+\frac{0,6}{-3}+\frac{1}{-2}+\frac{0,7}{-1}+\frac{0,3}{0}+\frac{0,1}{1},$$
$$\widetilde{B}=\frac{0,2}{0}+\frac{0,7}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0,8}{3}+\frac{0,2}{4}.$$
Отображение $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ задано как $f(x,y)=x^2+y^2$. Найдите нечеткий образ $\widetilde{C}=\widehat{f}(\widetilde{A},\widetilde{B})$.
9. Имеются два треугольных числа $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{u}}(x)=tr[3;4;5](x)$ и $\mu_{\tilde{v}}(y)=tr[1;2;3](y)$ соответственно. Пусть отображение $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ описывается формулой $z=f(x,y)=x/y$. Применяя принцип обобщения, найдите степени принадлежности нечеткого числа $\tilde{w}=\tilde{u}/\tilde{v}$, то есть значения ФП $\mu_{\tilde{w}}(z)$ при $z=1,2,3,4,5$.

3. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЕТКИМИ ЧИСЛАМИ

Арифметические операции над нечеткими числами являются основой нечеткой математики. Чтобы лучше понять их сущность, сначала рассмотрим классические арифметические операции с обычными (четкими) промежутками действительной оси. Такие операции можно рассматривать как расширение обычных арифметических операций над действительными числами (в некоторых источниках это называется «интервальной арифметикой»).

Пусть λ – действительное число, $A=[a_1,a_2]$ и $B=[b_1,b_2]$ – два отрезка на действительной оси. Предполагается, что $a_1<a_2$ и $b_1<b_2$.

***Опр.* 3.1.** Результаты *арифметических операций над отрезками* (сложения, вычитания, умножения, деления) определим следующим образом [11]:

- сумма A и B – это отрезок $A+B=[a_1+b_1;\, a_2+b_2]$;
- разность A и B – это отрезок $A-B=[a_1-b_2;\, a_2-b_1]$;
- произведение A на скаляр λ – это отрезок

$$\lambda A=\begin{cases}[\lambda a_1,\, \lambda a_2], & \text{если } \lambda\ge 0\\ [\lambda a_2,\, \lambda a_1], & \text{если } \lambda<0;\end{cases}$$

- произведение A на B – это отрезок $A\cdot B=[\min P;\, \max P]$,

где $P=\{a_1b_1;\, a_1b_2;\, a_2b_1;\, a_2b_2\}$;

- частное от деления A на B (при условии $0\notin B$) – это отрезок

$$\frac{A}{B}=[a_1;\, a_2]\cdot\left[\frac{1}{b_2};\, \frac{1}{b_1}\right].$$

Нетрудно заметить, что если рассматривать отрезки, состоящие из единственной точки, то есть $A=[a,a]$ и $B=[b,b]$, то определенные выше операции просто превращаются в обычные арифметические операции над действительными числами a и b.

Для придания общности нашим рассуждениям будем обозначать любую из четырех арифметических операций условным знаком $\otimes$. Характеристические функции отрезков A и B будем обозначать χ_A и χ_B соответственно. Имеется в виду

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in[a_1,a_2]\\ 0, \text{ если } x\notin[a_1,a_2].\end{cases}$$

Докажем единый для всех арифметических операций принцип обобщения, который позволит нам распространить операции над действительными числами на операции над отрезками действительной оси. Это утверждение – своего рода «смычка» между обычной и нечеткой арифметиками.

***Утв.* 3.1.** Пусть $A=[a_1,a_2]$ и $B=[b_1,b_2]$ – два отрезка действительной оси, а $\otimes$ – одна из арифметических операций над ними. Тогда характеристическая функция результата операции $A\otimes B$

$$\chi_{A\otimes B}(z)=\sup_{\{(x,y)|x\otimes y=z\}}\min\left(\chi_A(x),\,\chi_B(y)\right).$$

► Легко убедиться, что

$$\min\left(\chi_A(x),\,\chi_B(y)\right)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in A \text{ и } y\in B\\ 0, \text{ если } x\notin A \text{ или } y\notin B.\end{cases}$$

Докажем утверждение теоремы для одного из четырех частных случаев. Так, если $\otimes=+$, то предстоит доказать, что

$$\chi_{A+B}(z)=\sup_{\{(x,y)|x+y=z\}}\min\left(\chi_A(x),\,\chi_B(y)\right).$$

Действительно, если $x\in[a_1,a_2]$ и $y\in[b_1,b_2]$, то для любых таких x и y сумма $(x+y)=z\in[a_1+b_1,a_2+b_2]\Leftrightarrow\chi_{A+B}(z)=1$, что следует из непрерывности отрезков действительной числовой оси. Но это равносильно $\sup\limits_{\{(x,y)|x+y=z\}}\min\left(\chi_A(x),\,\chi_B(y)\right)=\min(1,1)=1.$

Если же хотя бы одно из слагаемых $x\notin[a_1,a_2]$ или $y\notin[b_1,b_2]$, то их сумма не должна попадать в результирующий промежуток, т.е. $(x+y)=z\notin[a_1+b_1,a_2+b_2]\Leftrightarrow\chi_{A+B}(z)=0.$ Но это равносильно

$$\sup_{\{(x,y)|x+y=z\}}\min\left(\chi_A(x),\,\chi_B(y)\right)=\left[\begin{array}{l}\min(1,0)=0.\\ \min(0,1)=0\\ \min(0,0)=0.\end{array}\right.=0.$$

Утверждение для операции сложения доказано. ◄

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что и остальные арифметические операции полностью удовлетворяют принципу обобщения.

Замечание: в случае арифметических операций над обычными (четкими) отрезками верхнюю грань (supremum) в утв. 3.1, конечно, можно опустить. Это связано с бинарностью характеристической функции (возможные ее значения – только 0 или 1). Тем не менее, появление операции sup предполагает последующее распространение доказанного утверждения на нечеткие промежутки, то есть на нечеткие числа (сравните формулу утв. 3.1 с принципом обобщения Заде, обсуждавшимся в предыдущем разделе).

Теперь мы можем совершенно обоснованно сформулировать определения результатов арифметических операций над НЧ.

***Опр*. 3.2.** Пусть $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ - нечеткие числа, заданные функциями принадлежности $\mu_{\tilde{u}}(x)$ и $\mu_{\tilde{v}}(y)$ соответственно. Тогда:

1) суммой $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ называется нечеткое число $(\tilde{u}+\tilde{v})$ с функцией принадлежности

$$\mu_{(\tilde{u}+\tilde{v})}(z)=\sup_{\{(x,y)|x+y=z\}}\min\left(\mu_{\tilde{u}}(x),\,\mu_{\tilde{v}}(y)\right);$$

2) разностью $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ называется нечеткое число $(\tilde{u}-\tilde{v})$ с функцией принадлежности

$$\mu_{(\tilde{u}-\tilde{v})}(z)=\sup_{\{(x,y)|x-y=z\}}\min\left(\mu_{\tilde{u}}(x),\,\mu_{\tilde{v}}(y)\right);$$

3) произведением НЧ $\tilde{u}$ на обычное (четкое) действительное число λ называется нечеткое число $\lambda\tilde{u}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\lambda\tilde{u}}(z)=\begin{cases}\sup\limits_{\{x|\lambda x=z\}}\mu_{\tilde{u}}(x), \text{ если } \lambda\neq 0\\ \chi_{\{0\}}(z), \text{ если } \lambda=0\end{cases}=\begin{cases}\mu_{\tilde{u}}(\lambda^{-1}z), \text{ если } \lambda\neq 0\\ \chi_{\{0\}}(z), \text{ если } \lambda=0,\end{cases}$$

где $\chi_{\{0\}}$ - характеристическая функция элемента $\{0\}$ (нечеткий синглтон);

4) произведением $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ называется нечеткое число $(\tilde{u}\cdot\tilde{v})$ с функцией принадлежности

$$\mu_{(\tilde{u}\cdot\tilde{v})}(z)=\sup_{\{(x,y)|xy=z\}}\min\left(\mu_{\tilde{u}}(x),\,\mu_{\tilde{v}}(y)\right);$$

5) частным $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ называется нечеткое число $\tilde{u}/\tilde{v}$

$$\mu_{(\tilde{u}/\tilde{v})}(z)=\sup_{\{(x,y)|x/y=z\}}\min\left(\mu_{\tilde{u}}(x),\,\mu_{\tilde{v}}(y)\right)$$

при условии $0\notin supp(\tilde{v})$.

Внимательный читатель наверняка подметил, что определение 3.2 представляет собой известный нам принцип обобщения Заде, однако конкретизированный для каждого вида арифметических операций.

Пример 3.1. Пусть даны два нечетких числа

$$\tilde{u} = \frac{0,3}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0,4}{3}, \quad \tilde{v} = \frac{0,7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,2}{4}.$$

Вычислить сумму, разность, произведение и частное данных НЧ.

► Для наглядности выполним расчеты в таблицах. Ячейки представлены в формате $(x \otimes y) \,|\, \min\left(\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\right)$.

А. Сумма:

$\otimes = +$	1	2	3
2	3 | 0,3	4 | 0,7	5 | 0,4
3	4 | 0,3	5 | 1,0	6 | 0,4
4	5 | 0,2	6 | 0,2	7 | 0,2

$$\tilde{u} + \tilde{v} = \frac{0,3}{3} + \frac{\max(0,3;0,7)}{4} + \frac{\max(0,2;1;0,4)}{5} + \frac{\max(0,2;\,0,4)}{6} + \frac{0,2}{7},$$

$$\tilde{u} + \tilde{v} = \frac{0,3}{3} + \frac{0,7}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,4}{6} + \frac{0,2}{7}.$$

Б. Разность:

$\otimes = -$	1	2	3
2	-1 | 0,3	0 | 0,7	1 | 0,4
3	-2 | 0,3	-1 | 1,0	0 | 0,4
4	-3 | 0,2	-2 | 0,2	-1 | 0,2

$$\tilde{u} - \tilde{v} = \frac{0,2}{-3} + \frac{\max(0,2;0,3)}{-2} + \frac{\max(0,2;1;0,3)}{-1} + \frac{\max(0,4;\,0,7)}{0} + \frac{0,4}{1},$$

$$\tilde{u} - \tilde{v} = \frac{0,2}{-3} + \frac{0,3}{-2} + \frac{1}{-1} + \frac{0,7}{0} + \frac{0,4}{1}.$$

В. Произведение:

$\otimes = \times$	1	2	3
2	2 | 0,3	4 | 0,7	6 | 0,4
3	3 | 0,3	6 | 1,0	9 | 0,4
4	4 | 0,2	8 | 0,2	12 | 0,2

$$\tilde{u}\cdot\tilde{v}=\frac{0,3}{2}+\frac{0,3}{3}+\frac{\max(0,2;\,0,7)}{4}+\frac{\max(0,4;\,1,0)}{6}+$$
$$+\frac{0,2}{8}+\frac{0,4}{9}+\frac{0,2}{12},$$
$$\tilde{u}\cdot\tilde{v}=\frac{0,3}{2}+\frac{0,3}{3}+\frac{0,7}{4}+\frac{1}{6}+\frac{0,2}{8}+\frac{0,4}{9}+\frac{0,2}{12}.$$

Заметим, что полученное в пункте «В» нечеткое множество уже не выпуклое (степень принадлежности элемента 9 больше, чем у двух соседних элементов), следовательно, $\tilde{u}\cdot\tilde{v}$ не является нечетким числом по определению.

Г. Частное:

$\otimes = \div$	1	2	3
2	1/2 | 0,3	1 | 0,7	3/2 | 0,4
3	1/3 | 0,3	2/3 | 1,0	1 | 0,4
4	1/4 | 0,2	1/2 | 0,2	3/4 | 0,2

$$\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}=\frac{0,2}{1/4}+\frac{0,3}{1/3}+\frac{\max(0,2;\,0,3)}{1/2}+\frac{1,0}{2/3}+$$
$$+\frac{0,2}{3/4}+\frac{\max(0,4;\,0,7)}{1}+\frac{0,4}{3/2},$$
$$\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}=\frac{0,2}{1/4}+\frac{0,3}{1/3}+\frac{0,3}{1/2}+\frac{1,0}{2/3}+\frac{0,2}{3/4}+\frac{0,7}{1}+\frac{0,4}{3/2}.$$

Полученное в пункте «Г» нечеткое множество также не выпуклое (степень принадлежности элемента 1 больше, чем у двух соседних элементов), следовательно, $\tilde{u}/\tilde{v}$ не является нечетким числом.◄

Безусловно, весьма желательной представляется замкнутость множества всех нечетких чисел относительно любых арифметических операций, т.е. чтобы их результат также был нечетким числом. Сформулируем соответствующее достаточное условие.

***Утв.* 3.2.** (Dubois & Prade [12]). Если нечеткие числа $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ имеют *непрерывные* функции принадлежности, то результатом арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) над ними также будут нечеткие числа.

Вместе с тем необходимо отметить, что объем вычислений с использованием принципа расширения существенно возрастает, если мы имеем дело с нечеткими числами, заданными при помощи непрерывных ФП.

Пример 3.2. Пусть даны два трапециевидных НЧ:

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = tz[1,2,3,4](x) = \begin{cases} x-1, \text{ если } 1 \le x \le 2 \\ 1, \text{ если } 2 < x < 3 \\ 4-x, \text{ если } 3 \le x \le 4 \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{v}}(y) = tz[2,3,4,8](y) = \begin{cases} y-2, \text{ если } 2 \le y \le 3 \\ 1, \text{ если } 3 < y < 4 \\ 2-\dfrac{y}{4}, \text{ если } 4 \le y \le 8 \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти нечеткое число $(\tilde{u}\cdot\tilde{v})$.

► По определению произведения нечетких чисел

$$\mu_{(\tilde{u}\cdot\tilde{v})}(z) = \sup_{\{(x,y)|xy=z\}} \min\left(\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\right).$$

Носитель НЧ $\tilde{u}$ – промежуток $x \in [1, 4]$, а носитель НЧ $\tilde{v}$ – промежуток $y \in [2, 8]$. Тогда носитель НЧ $(\tilde{u}\cdot\tilde{v})$ будет $z \in [2, 32]$.

Решим поставленную задачу с использованием MathCad.

Сначала опишем исходные НЧ, используя возможность MathCad задавать функции, определяемые различными аналитическими выражениями на разных промежутках (piecewise functions):

$$a := 1 \qquad b := 2 \qquad c := 3 \qquad d := 4$$

$$e := 2 \qquad f := 3 \qquad g := 4 \qquad h := 8$$

$$\mu u(x) := \left| \begin{array}{l} \dfrac{x-a}{b-a} \text{ if } a < x \le b \\ 1 \text{ if } b < x \le c \\ \dfrac{x-d}{c-d} \text{ if } c < x \le d \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \qquad \mu v(y) := \left| \begin{array}{l} \dfrac{y-e}{f-e} \text{ if } e < y \le f \\ 1 \text{ if } f < y \le g \\ \dfrac{y-h}{g-h} \text{ if } g < y \le h \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

и построим графики этих функций принадлежности (рис. 3.1).

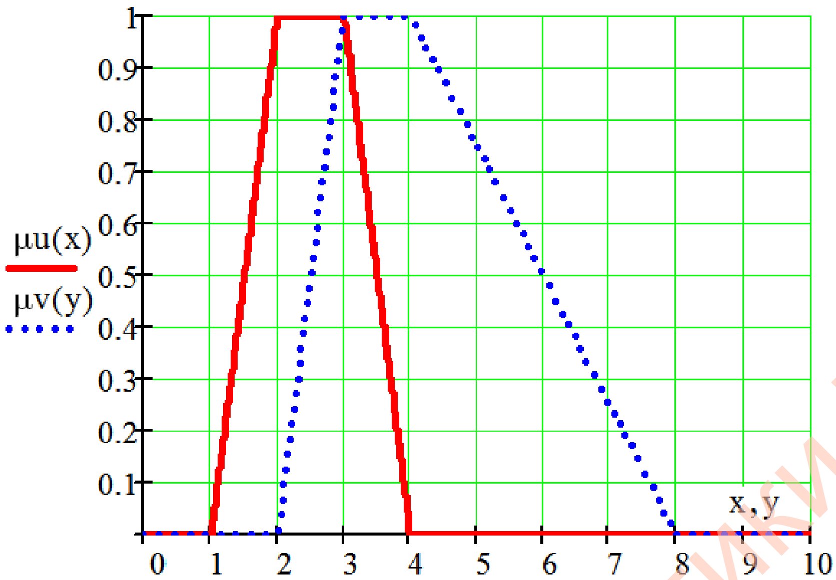


Рис. 3.1. К примеру 3.2. Функции принадлежности исходных НЧ $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$

Пусть $\tilde{w} = \tilde{u} \cdot \tilde{v}$. Реализуем принцип расширения Заде средствами программирования в MathCad. Алгоритм достаточно прост и интуитивно понятен:

```
μw(z) := | for i ∈ 1 .. 500
         |   | x_i ← 0.01·i
         |   | y_i ← min(μu(x_i), μv(z / x_i))
         | max(y)
```

Пояснение к алгоритму. Организуется цикл (for), причем количество его проходов выбирается так, чтобы покрыть весь носитель числа $\tilde{u}$; коэффициент 0,01 определяет степень дискретизации обработки значений носителя сообразно требуемой точности результата.

Функция принадлежности результата $\tilde{w}$ изображена на рис. 3.2.

Благодаря выбору достаточно высокой степени дискретизации, результирующая ФП выглядит как бы сплошной. ◄

Вместе с тем становится очевидным, что без применения средств вычислительной техники практическая реализация даже самых простых операций над НЧ, заданных непрерывными ФП, весьма затруднительна.

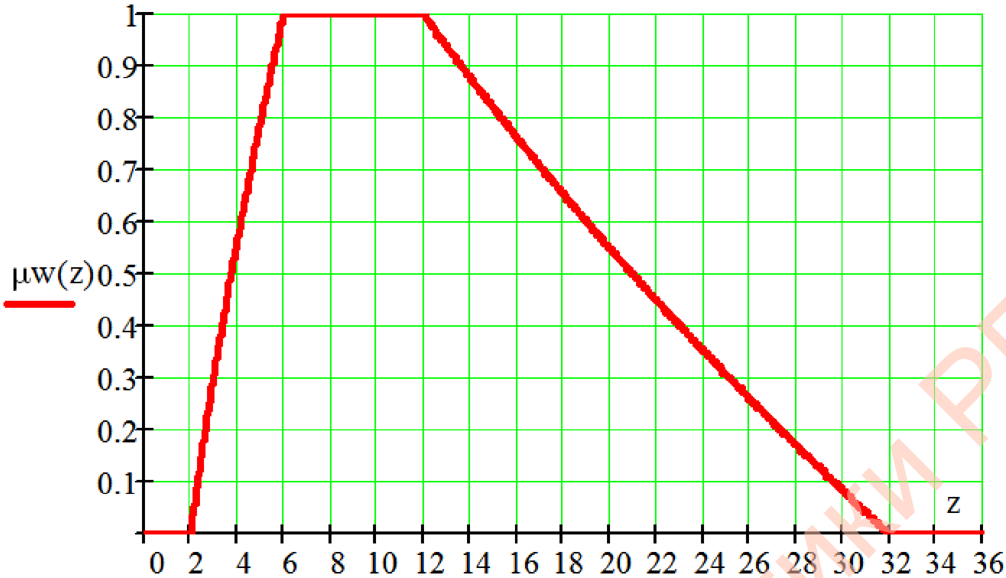


Рис. 3.2. К примеру 3.2. Функция принадлежности НЧ $\tilde{w} = \tilde{u} \cdot \tilde{v}$

Для сокращения объема вычислений можно использовать метод α-сечений, правда, придется пожертвовать точностью. Здесь будет полезно следующее утверждение.

***Утв.* 3.3.** Для любых $0 \le \alpha \le 1$ α-сечения операндов и результата арифметической операции связаны следующим образом:

$$[\tilde{u} \otimes \tilde{v}]_\alpha = [\tilde{u}]_\alpha \otimes [\tilde{v}]_\alpha,$$

где $\otimes$ – любая из четырех арифметических операций $\{+,-,\times,\div\}$.

► Данное утверждение является следствием α-уровневого принципа обобщения (см. утверждение раздела 2). Действительно, в качестве отображения f здесь выступает функция двух переменных – арифметическая операция $\otimes$, являющаяся непрерывной. Тем не менее, заинтересованные читатели могут найти развернутое доказательство данной теоремы в [22].◄

Используя определения операций над отрезками, можно доказать следующее следствие из утверждения 3.3.

***Утв.* 3.4.** Пусть $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ – нечеткие числа, а $u_\alpha = \left[\underline{u_\alpha}, \overline{u_\alpha}\right]$ и $v_\alpha = \left[\underline{v_\alpha}, \overline{v_\alpha}\right]$ – произвольные их α-сечения, $0 \le \alpha \le 1$. Тогда:

- сумма $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ – это НЧ $\tilde{u} + \tilde{v}$ с α-сечениями

$$(\tilde{u} + \tilde{v})_\alpha = u_\alpha + v_\alpha = \left[\underline{u_\alpha} + \underline{v_\alpha}, \overline{u_\alpha} + \overline{v_\alpha}\right];$$

- разность $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ – это НЧ $\tilde{u} - \tilde{v}$ с α-сечениями

$$\left(\tilde{u}-\tilde{v}\right)_\alpha = u_\alpha - v_\alpha = \left[\underline{u_\alpha} - \overline{v_\alpha},\, \overline{u_\alpha} - \underline{v_\alpha}\right];$$

- произведение $\tilde{u}$ на скаляр λ – это НЧ с α-сечениями

$$\left(\lambda\tilde{u}\right)_\alpha = \lambda u_\alpha = \begin{cases} \left[\lambda\underline{u_\alpha},\, \lambda\overline{u_\alpha}\right], & \text{если } \lambda \geq 0 \\ \left[\lambda\overline{u_\alpha},\, \lambda\underline{u_\alpha}\right], & \text{если } \lambda < 0; \end{cases}$$

- произведение $\tilde{u}$ на $\tilde{v}$ – это нечеткое число $\tilde{u}\cdot\tilde{v}$ с α-сечениями

$$\left(\tilde{u}\cdot\tilde{v}\right)_\alpha = u_\alpha \cdot v_\alpha = \left\{\min P_\alpha;\, \max P_\alpha\right\},$$

где множество $P_\alpha = \left\{\underline{u_\alpha}\,\underline{v_\alpha};\, \underline{u_\alpha}\,\overline{v_\alpha};\, \overline{u_\alpha}\,\underline{v_\alpha};\, \overline{u_\alpha}\,\overline{v_\alpha}\right\}$;

- частное деления $\tilde{u}$ на $\tilde{v}$ (при условии $0 \notin supp\,\tilde{v}$) – это интервал

$$\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right)_\alpha = \frac{u_\alpha}{v_\alpha} = [\underline{u_\alpha};\, \overline{u_\alpha}]\cdot\left[\frac{1}{\overline{v_\alpha}};\, \frac{1}{\underline{v_\alpha}}\right].$$

Доказательство данного утверждения предоставляем читателю в качестве упражнения.

Пример 3.3. Даны два треугольных НЧ $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ с функциями принадлежности:

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = tr[1,2,3](x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x, & \text{если } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{v}}(x) = tr[3,4,5](x) = \begin{cases} x-3, & \text{если } 3 \leq x \leq 4 \\ 5-x, & \text{если } 4 < x \leq 5 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Применяя метод α-сечений, выполнить все арифметические операции над этими числами.

► Сначала запишем α-сечения исходных множеств:

$$u_\alpha = [1+\alpha,\ 3-\alpha] \text{ и } v_\alpha = [3+\alpha,\ 5-\alpha].$$

Используя утв. 3.4, получаем

$$\left(\tilde{u}+\tilde{v}\right)_\alpha = u_\alpha + v_\alpha = [4+2\alpha,\, 8-2\alpha] = \left(tr[4,6,8]\right)_\alpha,$$

$$\left(\tilde{u}-\tilde{v}\right)_\alpha = u_\alpha - v_\alpha = [-4+2\alpha,\, -2\alpha] = \left(tr[-4,-2,0]\right)_\alpha,$$

$$\left(2\cdot\tilde{u}\right)_\alpha = 2\cdot u_\alpha = [2+2\alpha,\ 6-2\alpha] = \left(tr[2,4,6]\right)_\alpha.$$

Примечательно, что операции сложения, вычитания и умножения треугольных НЧ на действительное число λ приводят также к треугольным НЧ, то есть класс треугольных (и трапециевидных) чисел замкнут относительно таких операций.

Для выполнения операции умножения составим множество

$$P_\alpha = \left\{ \underline{u_\alpha}\,\underline{v_\alpha};\ \underline{u_\alpha}\,\overline{v_\alpha};\ \overline{u_\alpha}\,\underline{v_\alpha};\ \overline{u_\alpha}\,\overline{v_\alpha} \right\} =$$

$$= \left\{ (1+\alpha)(3+\alpha);\ (1+\alpha)(5-\alpha);\ (3-\alpha)(3+\alpha);\ (3-\alpha)(5-\alpha) \right\}.$$

Легко проверить, что

$$\min P_\alpha = (1+\alpha)(3+\alpha),\ \text{а}\ \max P_\alpha = (3-\alpha)(5-\alpha).$$

Тогда

$$\left(\tilde{u}\cdot\tilde{v}\right)_\alpha = u_\alpha \cdot v_\alpha = \left[(1+\alpha)(3+\alpha);\ (3-\alpha)(5-\alpha) \right],$$

то есть получилось, вообще говоря, не треугольное НЧ.

Аналогично частное

$$\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right)_\alpha = \frac{u_\alpha}{v_\alpha} = \left[\frac{1+\alpha}{5-\alpha};\ \frac{3-\alpha}{3+\alpha} \right]$$

также не является треугольным числом.

Изобразим результат операции умножения на графике (рис. 3.3).

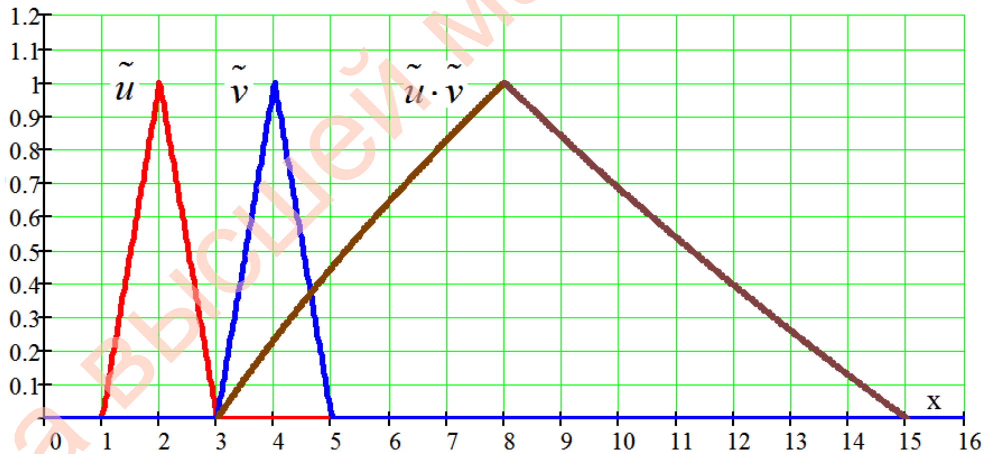


Рис. 3.3. К примеру 3.3. Функции принадлежности $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ и $\tilde{u}\cdot\tilde{v}$

По рис. 3.3 видно, что число $\tilde{u}\cdot\tilde{v}$ не треугольное: левая ветвь ФП выпуклая, правая – вогнутая. ◄

Для практических расчетов полезным будет следующее утверждение, являющееся следствием из утв. 3.4.

***Утв.* 3.5.** Пусть заданы два треугольных нечетких числа с ФП $\mu_{\tilde{u}}(x) = tr[a,b,c](x)$ и $\mu_{\tilde{v}}(x) = tr[d,e,f](x)$ соответственно. Пусть λ – произвольное действительное число. Тогда

$$\mu_{\tilde{u}+\tilde{v}}(x) = tr[a+d,\ b+e,\ c+f](x),$$

$$\mu_{\lambda\tilde{u}}(x)=\begin{cases} tr[\lambda a,\ \lambda b,\ \lambda c](x), \text{ если } \lambda \ge 0 \\ tr[\lambda c,\ \lambda b,\ \lambda a](x), \text{ если } \lambda < 0, \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{u}-\tilde{v}}(x)=tr[a-f,\ b-e,\ c-d](x).$$

Доказательство предлагаем читателю выполнить самостоятельно.

Напомним, что треугольные и трапециевидные нечеткие числа являются частным случаем LR-чисел. И утверждение 3.5, вообще говоря, может быть расширено и на более общий случай LR-чисел, которые рассматривались в разделе 1. Теперь для удобства выполнения операций будем представлять эти числа в несколько ином виде: $\tilde{u}=[a,\alpha,\beta]_{LR}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{u}}(x)=[a,\alpha,\beta]_{LR}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), \text{ если } a-\alpha \le x \le a, \quad \alpha>0 \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right), \text{ если } a< x \le a+\beta, \quad \beta>0 \\ \quad 0 \qquad \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где a – мода НЧ, α и β – левый и правый показатели нечеткости (так называемые *спрэды*), $L(t),\ R(t)\colon\ [0,1]\to[0,1]$ – две функции формы, т.е. непрерывные убывающие функции, удовлетворяющие условиям $R(0)=L(0)=1$ и $R(1)=L(1)=0$, [26].

Правила выполнения арифметических операций над такими числами весьма просты и могут быть представлены в виде следующего утверждения.

***Утв.* 3.6.** Пусть заданы два нечетких LR – числа $\tilde{u}=[a,\alpha,\beta]_{LR}$ и $\tilde{v}=[b,\gamma,\delta]_{LR}$ и произвольное число $\lambda\in\mathbb{R}$. Тогда

1) $-\tilde{u}=-[a,\alpha,\beta]_{LR}=[-a,\beta,\alpha]_{LR}$;

2) $\lambda\cdot\tilde{u}=\lambda\cdot[a,\alpha,\beta]_{LR}=\begin{cases}[\lambda a,\lambda\alpha,\lambda\beta]_{LR}, \text{ если } \lambda\ge 0\\ [\lambda a,\lambda\beta,\lambda\alpha]_{LR}, \text{ если } \lambda<0;\end{cases}$

3) $\tilde{u}+\tilde{v}=[a,\alpha,\beta]_{LR}+[b,\gamma,\delta]_{LR}=[a+b,\alpha+\gamma,\beta+\delta]_{LR}$;

4) $\tilde{u}-\tilde{v}=[a,\alpha,\beta]_{LR}-[b,\gamma,\delta]_{LR}=[a-b,\alpha+\delta,\beta+\gamma]_{LR}$;

5) $\tilde{u}\cdot\tilde{v}\approx\begin{cases}[ab,a\gamma+b\alpha,\alpha\delta+b\beta]_{LR}, \text{ если } a>0,\ b>0\\ [ab,b\alpha-a\delta,b\beta+a\gamma]_{LR}, \text{ если } a<0,\ b>0\\ [ab,-b\beta-a\delta,-b\alpha-a\gamma]_{LR}, \text{ если } a<0,\ b<0,\end{cases}$

здесь и ниже предполагается, что спрэды у НЧ-операндов малы по сравнению с их модами;

6) $(\tilde{u})^{-1} = ([a,\alpha,\beta]_{LR})^{-1} \approx [a^{-1},\beta a^{-2},\alpha a^{-2}]_{RL}$ при $a > 0$;

7) $\dfrac{\tilde{u}}{\tilde{v}} = \dfrac{[a,\alpha,\beta]_{LR}}{[b,\gamma,\delta]_{RL}} \approx \left[\dfrac{a}{b},\dfrac{a\delta + b\alpha}{b^2},\dfrac{a\gamma + b\beta}{b^2}\right]_{LR}$ при $a > 0,\, b > 0$.

► Докажем одно из утверждений теоремы, например третье.

Запишем произвольное альфа-сечение НЧ LR-типа в виде промежутка $u_t = [\underline{u_t}, \overline{u_t}],\ 0 \le t \le 1$:

$$L\left(\frac{a - \underline{u_t}}{\alpha}\right) = t \Rightarrow \frac{a - \underline{u_t}}{\alpha} = L^{-1}(t) \Rightarrow \underline{u_t} = a - \alpha L^{-1}(t),$$

$$R\left(\frac{\overline{u_t} - a}{\beta}\right) = t \Rightarrow \frac{\overline{u_t} - a}{\beta} = R^{-1}(t) \Rightarrow \overline{u_t} = a + \beta R^{-1}(t).$$

Существование однозначных обратных функций $L^{-1}(t)$ и $R^{-1}(t)$ гарантировано монотонностью непрерывных функций формы.

Аналогично для второго числа

$$\underline{v_t} = b - \gamma L^{-1}(t),\quad \overline{v_t} = b + \delta R^{-1}(t).$$

В соответствии с α-уровневым принципом (см. утв. 3.4) для любых $0 \le t \le 1$ справедливо

$$(\tilde{u} + \tilde{v})_t = u_t + v_t = \left[\underline{u_t} + \underline{v_t},\ \overline{u_t} + \overline{v_t}\right] =$$

$$= \left[\ a - \alpha L^{-1}(t) + b - \gamma L^{-1}(t),\ \ a + \beta R^{-1}(t) + b + \delta R^{-1}(t)\right] =$$

$$= \left[\ (a + b) - (\alpha + \gamma)L^{-1}(t),\ (a + b) + (\beta + \delta)R^{-1}(t)\right] =$$

$$= \left([a + b, \alpha + \gamma, \beta + \delta]_{LR}\right)_t.$$

Из равенства всех сечений следует

$$\tilde{u} + \tilde{v} = [a,\alpha,\beta]_{LR} + [b,\gamma,\delta]_{LR} = [a + b, \alpha + \gamma, \beta + \delta]_{LR}. \blacktriangleleft$$

Подведем итог. Как мы выяснили, некоторые из операций над НЧ, например умножение и деление, имеют определенные недостатки. Так, умножая два треугольных НЧ (два числа LR-типа), мы, вообще говоря, не получаем в качестве результата НЧ того же типа. А в дискретном случае может получиться нечеткое множество, вовсе не являющееся НЧ. Чтобы устранить указанный недостаток, разрабатываются иные операции, например *перекрестное произведение* нечетких чисел (*cross product*). Их рассмотрение выходит за рамки данного пособия, но ознакомиться с ними можно в [6], [8].

Вопросы и упражнения к разделу 3

1. Приведите определения основных арифметических операций над отрезками действительной числовой оси.
2. Сформулируйте принцип обобщения для арифметических операций над нечеткими числами.
3. Докажите утверждение 3.4 данного раздела.
4. Пусть $\mathbb{R}_F$ - множество всех действительных нечетких чисел (по аналогии с обычным множеством действительных чисел $\mathbb{R}$). Докажите, что: а) операция сложения НЧ коммутативна и ассоциативна; б) для любых $a, b \in \mathbb{R}$ таких, что $ab \geq 0$, и любого $\tilde{u} \in \mathbb{R}_F$ выполняется $(a+b)\tilde{u} = (a\tilde{u}) + (b\tilde{u})$; в) для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых НЧ $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_F$ справедливо $\lambda(\tilde{u} + \tilde{v}) = \lambda\tilde{u} + \lambda\tilde{v}$; г) для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и любого $\tilde{u} \in \mathbb{R}_F$ справедливо $(\lambda \cdot \mu) \cdot \tilde{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \tilde{u})$.
5. Докажите, что для всяких $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{R}_F$, носители которых не содержат 0, справедливо ассоциативное свойство умножения: $(\tilde{u} \cdot \tilde{v}) \cdot \tilde{w} = \tilde{u} \cdot (\tilde{v} \cdot \tilde{w})$.
6. Выполните все известные вам арифметические операции над отрезками действительной оси $A = [-10, -1]$ и $B = [1, 2]$.
7. Даны нечеткие числа: трапециевидное $\tilde{u} = tz[2,5,6,7]$ и треугольное $\tilde{v} = tr[1,4,5]$. Вычислите $\tilde{u} + \tilde{v}$, $\tilde{u} - \tilde{v}$, $-2\tilde{u} + \tilde{v}$, $\tilde{u} - \tilde{u}$ и $2\tilde{v} - \tilde{v}$.
8. Покажите, что для произвольного НЧ $\tilde{u} \in \mathbb{R}_F$, вообще говоря, $\tilde{u} - \tilde{u} \neq 0$. Исследуйте альтернативную операцию вычитания НЧ – *разность Хукухары* (*Hukuhara difference*, *H-difference*), определяемую следующим образом: $\tilde{u} -_H \tilde{v} = \tilde{w} \Leftrightarrow \tilde{u} = \tilde{v} + \tilde{w}$, где «+» есть стандартная операция сложения НЧ. Запишите выражение для *α*-сечений разности *Хукухары* и покажите, что $\tilde{u} -_H \tilde{u} = 0$, $\forall \tilde{u} \in \mathbb{R}_F$.
9. Найдите произведение $\tilde{u} \cdot \tilde{v}$ трапециевидного $\tilde{u} = tz[1,3,5,6]$ и треугольного $\tilde{v} = tr[2,4,6]$ чисел.

10. Найдите α-сечения произведения двух треугольных НЧ: $\tilde{u} = tr[a_1, b_1, c_1]$ и $\tilde{v} = tr[a_2, b_2, c_2]$ при условии $a_1, a_2 > 0$.
11. Покажите, что операции сложения, вычитания, а также умножения трапециевидных НЧ на действительное число λ приводят также к трапециевидным НЧ, то есть множество всех трапециевидных чисел замкнуто относительно таких операций.
12. Сформулируйте утверждение 3.5 для случая трапециевидных чисел и докажите его, применяя α-уровневый подход.
13. Попробуйте доказать отдельные положения утверждения 3.6.
14. Даны два нечетких числа: $\tilde{u} = [4,1,2]_{LR}$ и $\tilde{v} = [10,4,3]_{LR}$. Используя положения утверждения 3.6, найдите числа $2\tilde{u} + \tilde{v}$, $\tilde{u} - \tilde{v}$, $\dfrac{\tilde{u} \cdot \tilde{v}}{2}$ $\dfrac{2\tilde{v}}{\tilde{u}}$. Последнее число вычислите дополнительно с использованием принципа обобщения Заде. Сравните полученные результаты, сделайте выводы.
15. Найдите α-сечения произведения двух гауссовых НЧ, описываемых ФП следующего вида:

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < x_1 - a\sigma_1 \\ \exp\left(-\dfrac{(x-x_1)^2}{2\sigma_1^2}\right), \quad \text{если } x_1 - a\sigma_1 \le x < x_1 \\ \exp\left(-\dfrac{(x-x_1)^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad \text{если } x_1 \le x < x_1 + a\sigma_2 \\ 0, \text{ если } x_1 + a\sigma_2 \le x. \end{cases}$$

16. Известны так называемые *плоские LR-числа* (*flat LR-numbers*), функция принадлежности которых имеет вид:

$$[a_1, a_2, \alpha, \beta]_{LR} = \begin{cases} L\left(\dfrac{a_1 - x}{\alpha}\right), \text{ если } a_1 - \alpha \le x \le a_1, \quad \alpha > 0 \\ 1, \text{ если } a_1 < x < a_2 \\ R\left(\dfrac{x - a_2}{\beta}\right), \text{ если } a_2 \le x \le a_2 + \beta, \quad \beta > 0 \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Частным их случаем являются трапециевидные числа.

Покажите, что для двух любых таких чисел $[a_1, a_2, \alpha, \beta]_{LR}$ и $[b_1, b_2, \alpha, \beta]_{LR}$ при $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$ справедливы формулы:

$[a_1, a_2, \alpha, \beta]_{LR} + [b_1, b_2, \gamma, \delta]_{LR} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \alpha + \gamma, \beta + \delta]_{LR}$;

$[a_1, a_2, \alpha, \beta]_{LR} \cdot [b_1, b_2, \gamma, \delta]_{LR} \approx [a_1 b_1, a_2 b_2, a_1\gamma + b_1\alpha, a_2\delta + b_2\beta]_{LR}$.

17. Попробуйте сформулировать в терминах нечетких чисел какую-нибудь задачу из повседневной жизни или, возможно, имеющую отношение к вашей будущей сфере профессиональной деятельности. Решите ее, используя освоенные вами приемы оперирования с НЧ. Задача может быть, например, следующей. Чтобы добраться на общественном транспорте от дома до супермаркета, потребуется около 40 минут (в зависимости от загруженности дороги); время на покупки – около часа. В обратный путь возьмем такси, которое доставит нас примерно за 20-30 минут (в зависимости от дорожного трафика). Сколько примерно времени потребуется для осуществления подобного плана шопинга?

4. ПОНЯТИЕ О НЕЧЕТКИХ ОТНОШЕНИЯХ

Понятие «отношение» в математике рассматривается в рамках теории множеств. Схожим образом, используя в качестве исходной базы нечеткие множества, можно прийти к «нечеткому отношению».

***Опр.* 4.1.** *Отношением* (*relation*) $\mathfrak{R}$ в классическом смысле, заданным на области определения $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, называется любое четкое подмножество декартового произведения $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$.

При этом если $n = 2$, то отношение называется *бинарным* (т.е. заданным на $U_1 \times U_2$), в общем случае – *n-арным*.

Поскольку классическое отношение является подмножеством декартового произведения четких множеств U_i, то оно может быть описано двузначной характеристической функцией:

$$\chi_{\mathfrak{R}} : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \to \{0, 1\},$$

где

$$\chi_{\mathfrak{R}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, \text{ если } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathfrak{R} \\ 0, \text{ если } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin \mathfrak{R}. \end{cases}$$

Обобщая характеристическую функцию классического отношения функцией принадлежности, придем к следующему определению.

***Опр.* 4.2.** *Нечетким отношением* (*fuzzy relation*) $\widetilde{\mathfrak{R}}$, заданным на области определения – универсуме $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$, называется любое нечеткое подмножество $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$, описываемое функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}} : U_1 \times U_2 \times ... \times U_n \to [0,1]$.

Если обозначить функцию принадлежности нечеткого отношения $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}$, то число $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x_1, x_2, ..., x_n) \in [0,1]$ есть степень принадлежности *n*-мерного элемента $(x_1, x_2, ..., x_n)$ данному отношению $\widetilde{\mathfrak{R}}$.

Предостерегаем читателя от отождествления понятий «нечеткое отношение» и «нечеткое декартово произведение», так как они имеют различный смысл. Это становится ясным из следующего определения.

***Опр.* 4.3.** *Нечетким декартовым произведением* (*fuzzy cartesian product*) нечетких множеств $\widetilde{A}_i \subset U_i, (i = \overline{1,n})$ называется нечеткое отношение $\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times ... \times \widetilde{A}_n$, описываемое функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times ... \times \widetilde{A}_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \min\left\{\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2), ..., \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)\right\}.$$

В общем случае функция принадлежности $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}$ нечеткого отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}$ представляет собой гиперповерхность в (*n*+1)-мерном пространстве.

Функция принадлежности бинарного нечеткого отношения на конечных дискретных носителях может быть представлена в табличном виде с указанием степеней принадлежности $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}$ для каждого дискретного двухэлементного кортежа (x_1, x_2). Действительно, пусть заданы дискретные носители $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ и $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, а на $X \times Y$ задано нечеткое отношение $\widetilde{\mathfrak{R}}$ посредством функции принадлежности $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x_i, y_j) = r_{ij}$, $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$. Тогда в матричном виде оно представимо как

$$\widetilde{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & ... & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & ... & r_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ r_{m1} & r_{m2} & ... & r_{mn} \end{pmatrix}.$$

В определенном смысле понятие нечеткого отношения является расширением одномерного понятия нечеткого подмножества $\widetilde{X}$ универсума U на многомерный случай. Аналогично одномерному случаю вводятся понятия носителя, ядра, α-сечения нечеткого отношения. Для сокращения объема записей приведем определения этих понятий только для бинарного случая.

***Опр.* 4.4.** *Носителем нечеткого отношения* $\widetilde{\mathfrak{R}}$, заданного на $X \times Y$, называется четкое подмножество декартового произведения $X \times Y$ вида

$$supp(\widetilde{\mathfrak{R}}) = \{(x, y) \in X \times Y \mid \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x, y) > 0\},$$

то есть подмножество тех пар, степень принадлежности которых к отношению отлична от нуля.

***Опр.* 4.5.** *Ядром нечеткого отношения* $\widetilde{\mathfrak{R}}$, заданного на $X \times Y$, называется четкое подмножество декартового произведения $X \times Y$ вида

$$core(\widetilde{\mathfrak{R}}) = \{(x, y) \in X \times Y \mid \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x, y) = 1\}.$$

***Опр.* 4.6.** *α-сечением нечеткого отношения* $\widetilde{\mathfrak{R}}$, заданного на $X \times Y$, называется четкое подмножество декартового произведения $X \times Y$ вида

$$\mathfrak{R}_\alpha = (\widetilde{\mathfrak{R}})_\alpha = \{(x, y) \in X \times Y \mid \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x, y) \ge \alpha\}, \ (0 \le \alpha \le 1).$$

Рассмотрим примеры задания дискретных и непрерывных бинарных отношений.

Пример 4.1. Предположим, что имеется группа из 5 пациентов, у которых могут отмечаться следующие симптомы: высокая температура, головная боль, боль в суставах. Построить возможное бинарное нечеткое отношение на $X \times Y$, где X – множество пациентов, Y – множество симптомов.

►Пусть $X = (1, 2, 3, 4, 5)$ – множество пациентов, каждому из которых присвоен порядковый номер, аналогично $Y = (1, 2, 3)$ – множество симптомов, закодированных как: 1 – высокая температура, 2 – головная боль, 3 – боль в суставах.

Доктор по итогам обследования пациентов может составить следующее нечеткое отношение:

$$\widetilde{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,1 \\ 0,7 & 1,0 & 0,8 \\ 1,0 & 1,0 & 0,6 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,8 \end{pmatrix},$$

где степень принадлежности каждого элемента отношению r_{ij} представляет собой степень выраженности j-го симптома у i-го пациента. Такие нечеткие отношения могут быть использованы в алгоритмах диагностики заболеваний. ◄

Пример 4.2. Пусть заданы множества: а) $X = \{0,1,2\}$, $Y = \{1,2,3,4,5\}$; б) $X = \mathbb{R}^+$, $Y = \mathbb{R}^+$. Описать нечеткое бинарное отношение на $X \times Y$: $\widetilde{\mathfrak{R}}$ = «y существенно превосходит x», где $x \in X$, $y \in Y$:

► а) так как в первом случае носитель отношения конечный дискретный, то опишем отношение при помощи матрицы, которая может иметь, например, такой вид:

$$\widetilde{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,7 & 1,0 \\ 0 & 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix};$$

б) во втором случае носитель отношения непрерывный, поэтому для описания нечеткого бинарного отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}$ можно, например, использовать функцию принадлежности вида

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } y \le x \\ \dfrac{y-x}{9x}, \text{ если } x < y \le 10x \\ 1, \text{ если } y > 10x. \end{cases}$$

Смысл построенного отношения (рис. 4.1) весьма прост: если y превосходит x на порядок величины (то есть в 10 раз), то степень принадлежности элемента (x, y) отношению равна 1, если $y \le x$, то строго ноль, в промежуточных случаях изменяется линейно. ◄

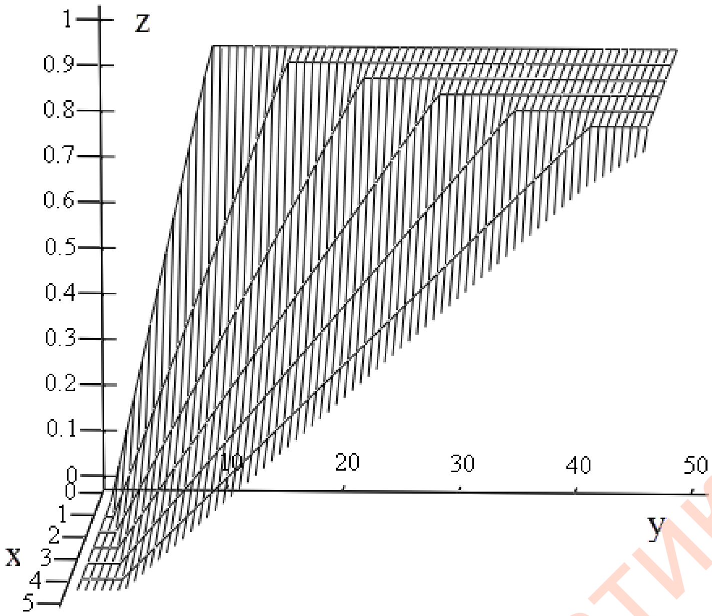


Рис. 4.1. К примеру 4.2. График функции принадлежности отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}$, $z = \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x, y)$

Рассмотрим некоторые операции над нечеткими бинарными отношениями. Как и в случае нечетких множеств, операции могут выполняться различными способами с применением различных T-норм и T-конорм (S-норм) – см. часть 1 пособия [4] или раздел 5 данного.

***Опр.* 4.7.** Пусть $\widetilde{\mathfrak{R}}$ и $\widetilde{\mathfrak{S}}$ – два нечетких бинарных отношения, заданных на $X \times Y$. Их *пересечением* (*intersection*) $\widetilde{\mathfrak{R}} \cap \widetilde{\mathfrak{S}}$ называется нечеткое бинарное отношение на $X \times Y$, описываемое функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}} \cap \widetilde{\mathfrak{S}}}(x, y) = \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x, y) \Delta \mu_{\widetilde{\mathfrak{S}}}(x, y),\ \forall (x, y) \in X \times Y,$$

где Δ – некоторая T-норма.

Например, в случае T-нормы Заде пересечение определяется как

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}} \cap \widetilde{\mathfrak{S}}}(x, y) = \min\left(\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x, y), \mu_{\widetilde{\mathfrak{S}}}(x, y)\right).$$

***Опр.* 4.8.** Пусть $\widetilde{\mathfrak{R}}$ и $\widetilde{\mathfrak{S}}$ – два нечетких бинарных отношения, заданных на $X \times Y$. Их *объединением* (*union*) $\widetilde{\mathfrak{R}} \cup \widetilde{\mathfrak{S}}$ называется нечеткое бинарное отношение на $X \times Y$, описываемое функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}} \cup \widetilde{\mathfrak{S}}}(x, y) = \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x, y) \nabla \mu_{\widetilde{\mathfrak{S}}}(x, y),\ \forall (x, y) \in X \times Y,$$

где ∇ – некоторая T-конорма (S-норма).

Например, в случае T-конормы Заде

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}\cup\widetilde{\mathfrak{S}}}(x,y)=\max\left(\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y),\mu_{\widetilde{\mathfrak{S}}}(x,y)\right).$$

***Опр.* 4.9.** Нечеткое отношение $\overline{\widetilde{\mathfrak{R}}}$ называется *дополнением* (*complement*) нечеткого отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}$, заданного на $X\times Y$, если

$$\mu_{\overline{\widetilde{\mathfrak{R}}}}(x,y)=1-\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y),\ \forall(x,y)\in X\times Y.$$

***Опр.* 4.10.** Пусть на $X\times Y$ задано нечеткое бинарное отношение $\widetilde{\mathfrak{R}}$ с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}:X\times Y\to[0,1]$. *Обратным нечетким отношением* (*inverse fuzzy relation*) $\widetilde{\mathfrak{R}}^{-1}$, определенным на $Y\times X$, называется отношение с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}^{-1}}:Y\times X\to[0,1]$, где $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}^{-1}}(y,x)=\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y)$.

Если носитель отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}$ дискретный и описывается матрицей $\left\|r_{ij}\right\|$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, то матрица обратного нечеткого отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}^{-1}$ будет транспонированной по отношению к исходной: $\left\|r_{ji}^{-1}\right\|=\left\|r_{ij}\right\|^{T}$.

Пример 4.3. Пусть $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$ – универсальные множества, а на $X\times Y$ заданы нечеткие отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}$ и $\widetilde{\mathfrak{S}}$ в матричном виде:

$$\widetilde{\mathfrak{R}}=\begin{pmatrix}0,9 & 0,8 & 1 & 0,9\\ 0,7 & 0,4 & 0,4 & 0,5\\ 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,1\end{pmatrix} \text{ и } \widetilde{\mathfrak{S}}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,3\\ 1 & 0,9 & 0,6 & 0,5\\ 0,7 & 1 & 0,9 & 0,7\end{pmatrix}.$$

Найти $\widetilde{\mathfrak{R}}\cap\widetilde{\mathfrak{S}}$, $\widetilde{\mathfrak{R}}\cup\widetilde{\mathfrak{S}}$, $\overline{\widetilde{\mathfrak{S}}}$, $\widetilde{\mathfrak{R}}^{-1}$.

► В соответствии с определениями операций, используя нормы Заде, получаем:

$$\widetilde{\mathfrak{R}}\cap\widetilde{\mathfrak{S}}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,3\\ 0,7 & 0,4 & 0,4 & 0,5\\ 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,1\end{pmatrix};$$

$$\widetilde{\mathfrak{R}}\cup\widetilde{\mathfrak{S}}=\begin{pmatrix}0,9 & 0,8 & 1 & 0,9\\ 1 & 0,9 & 0,6 & 0,5\\ 0,7 & 1 & 0,9 & 0,7\end{pmatrix};$$

$$\overline{\widetilde{\mathfrak{S}}} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,7 \\ 0 & 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,3 & 0 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad \widetilde{\mathfrak{R}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,7 & 0,3 \\ 0,8 & 0,4 & 0,3 \\ 1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,9 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Операции над бинарными отношениями, заданными на непрерывных носителях, уже невозможно представить в матричном виде, приходится использовать трехмерные графики.

Перейдем к рассмотрению композиции бинарных отношений, которая имеет важнейшее прикладное значение в нечеткой логике. Здесь возможны несколько вариантов, три наиболее значимых из которых мы рассмотрим ниже.

***Опр.* 4.11.** Пусть $\widetilde{\mathfrak{R}}$ и $\widetilde{\mathfrak{S}}$ – два нечетких бинарных отношения, заданных на универсумах $U \times V$ и $V \times W$ соответственно. *Максиминной композицией* (*max-min composition*) $\widetilde{\mathfrak{R}} \circ \widetilde{\mathfrak{S}}$ называется нечеткое бинарное отношение на $U \times W$ с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}} \circ \widetilde{\mathfrak{S}}}(x,z) = \sup\limits_{y \in V} \left[\min(\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y), \mu_{\widetilde{\mathfrak{S}}}(y,z)) \right]$.

Часто используется более общая форма записи определения 4.11:

$$\widetilde{\mathfrak{R}} \circ \widetilde{\mathfrak{S}}(x,z) = \bigvee_{y \in V} \widetilde{\mathfrak{R}}(x,y) \wedge \widetilde{\mathfrak{S}}(y,z),$$

где значки $\vee$ и $\wedge$ обозначают соответственно объединение и пересечение. Применительно к действительным числам обычно полагают $x \vee y = \max\{x,y\}$ и $x \wedge y = \min\{x,y\}$.

Проще всего понять смысл определения 4.11 на примере отношений с конечными дискретными носителями. Ведь в таком случае матрица максиминной композиции получается по обычным правилам матричного умножения с учетом того, что в смысле норм Заде операция умножения заменяется на минимум, а операция суммы – на максимум, а именно, если

$$\widetilde{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & r_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{np} \end{pmatrix}_{n \times p},$$

то их максиминная композиция будет

$$\widetilde{\mathfrak{T}} = \widetilde{\mathfrak{R}} \circ \widetilde{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mp} \end{pmatrix}_{m \times p},$$

где $t_{ij} = \max\limits_{1 \le k \le n} [\min(\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(u_i, v_k), \mu_{\widetilde{\mathfrak{S}}}(v_k, w_j))] = \max\limits_{1 \le k \le n} [\min(r_{ik}, s_{kj})]$.

Понятие максиминной композиции отношений может быть расширено за счет применения иных T-норм (*max-T-norm composition*):

$$\widetilde{\mathfrak{R}} \circ_{\Delta} \widetilde{\mathfrak{S}}(x,z) = \bigvee_{y \in V} \widetilde{\mathfrak{R}}(x,y) \Delta \widetilde{\mathfrak{S}}(y,z),$$

где Δ – произвольная T-норма.

Например, если T-норма – произведение, то получится композиция типа *max-prod* (*максимультипликативная композиция*):

$$\widetilde{\mathfrak{R}} \circ_{PROD} \widetilde{\mathfrak{S}}(x,z): \ \mu(x,z) = \max_{y \in V} \left[\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y) \cdot \mu_{\widetilde{\mathfrak{S}}}(y,z) \right].$$

***Опр.* 4.12.** Пусть $\widetilde{\mathfrak{R}}$ и $\widetilde{\mathfrak{S}}$ – два нечетких бинарных отношения, заданных на универсумах $U \times V$ и $V \times W$ соответственно. *Минимаксной композицией* (*min-max composition*) $\widetilde{\mathfrak{R}} \bullet \widetilde{\mathfrak{S}}$ называется нечеткое бинарное отношение на $U \times W$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}} \bullet \widetilde{\mathfrak{S}}}(x,z) = \min_{y \in V} \left[\max(\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y), \mu_{\widetilde{\mathfrak{S}}}(y,z)) \right].$$

Альтернативная запись:

$$\widetilde{\mathfrak{R}} \bullet \widetilde{\mathfrak{S}}(x,z) = \bigwedge_{y \in V} \widetilde{\mathfrak{R}}(x,y) \vee \widetilde{\mathfrak{S}}(y,z).$$

Понятие минимаксной композиции отношений может быть расширено за счет использования произвольных T-конорм (*min-T-conorm composition*):

$$\widetilde{\mathfrak{R}} \bullet_{\nabla} \widetilde{\mathfrak{S}}(x,z) = \bigwedge_{y \in V} \widetilde{\mathfrak{R}}(x,y) \nabla \widetilde{\mathfrak{S}}(y,z).$$

Пример 4.4. Пусть $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$ – универсальные множества. Пусть на $X \times Y$ и $Y \times Z$ заданы нечеткие отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}$ и $\widetilde{\mathfrak{S}}$ соответственно своими матрицами:

$$\widetilde{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 1 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix} \text{ и } \widetilde{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Найти: 1) $\widetilde{\mathfrak{R}} \circ \widetilde{\mathfrak{S}}$; 2) $\widetilde{\mathfrak{R}} \bullet \widetilde{\mathfrak{S}}$; 3) $\widetilde{\mathfrak{R}} \circ_{PROD} \widetilde{\mathfrak{S}}$, где $x \Delta y = xy$ – T-норма PROD.

►1. В соответствии с определением 4.11 имеем:

$$\widetilde{\mathfrak{R}} \circ \widetilde{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Пояснение. Покажем, как получен элемент с индексом 11 матрицы композиции отношений $\widetilde{\mathfrak{R}} \circ \widetilde{\mathfrak{S}}$:

$$\max\{\min\{0,3;0,8\}, \min\{0,7;0,1\}, \min\{0,2;0,5\}\} =$$

$$= \max\{0,3;0,1;0,2\} = 0,3.$$

2. В соответствии с определением 4.12

$$\widetilde{\mathfrak{R}} \bullet \widetilde{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пояснение. Покажем, как получен элемент с индексом 11 матрицы композиции отношений $\widetilde{\mathfrak{R}} \bullet \widetilde{\mathfrak{S}}$:

$$\min\{\max\{0,3;0,8\}, \max\{0,7;0,1\}, \max\{0,2;0,5\}\} =$$

$$= \min\{0,8;0,7;0,5\} = 0,5.$$

3. Максимультипликативная композиция

$$\widetilde{\mathfrak{R}} \circ_{PROD} \widetilde{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} \circ_{PROD} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,24 & 0,12 \\ 0,8 & 0,54 \end{pmatrix}.$$

Пояснение. Покажем, как получен элемент с индексом 11 матрицы композиции отношений $\widetilde{\mathfrak{R}} \circ_{PROD} \widetilde{\mathfrak{S}}$:

$$\max\{0,3 \cdot 0,8;\ 0,7 \cdot 0,1;\ 0,2 \cdot 0,5\} = \max\{0,24;\ 0,07;\ 0,1\} = 0,24. \blacktriangleleft$$

Приведем в ознакомительном порядке некоторые свойства композиции отношений на примере максиминной композиции.

Утверждение. Операция максиминной композиции нечетких отношений обладает следующими свойствами:

а) если $\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \subseteq \widetilde{\mathfrak{R}}_2$, то $\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ \widetilde{\mathfrak{R}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{R}}_2 \circ \widetilde{\mathfrak{R}}$, б) ассоциативна:

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ \left(\widetilde{\mathfrak{R}}_2 \circ \widetilde{\mathfrak{R}}_3\right) = \left(\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ \widetilde{\mathfrak{R}}_2\right) \circ \widetilde{\mathfrak{R}}_3,$$

в) дистрибутивна относительно операции объединения:

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ \left(\widetilde{\mathfrak{R}}_2 \cup \widetilde{\mathfrak{R}}_3\right) = \left(\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ \widetilde{\mathfrak{R}}_2\right) \cup \left(\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ \widetilde{\mathfrak{R}}_3\right),$$

г) недистрибутивна относительно операции пересечения:

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ \left(\widetilde{\mathfrak{R}}_2 \cap \widetilde{\mathfrak{R}}_3\right) \neq \left(\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ \widetilde{\mathfrak{R}}_2\right) \cap \left(\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ \widetilde{\mathfrak{R}}_3\right).$$

► Докажем одно из свойств, например «а». Пусть функции принадлежности нечетких отношений $\widetilde{\mathfrak{R}}_1$, $\widetilde{\mathfrak{R}}_2$, заданных на универсуме $X \times Y$, суть $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}_1}(x,y)$ и $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}_2}(x,y)$ соответственно. Пусть также задано произвольное нечеткое отношение $\widetilde{\mathfrak{R}}$ своей функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(y,z)$ на универсуме $Y \times Z$. Тогда, если $\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \subseteq \widetilde{\mathfrak{R}}_2$, то для любых $(x,y) \in X \times Y$ имеет место $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}_1}(x,y) \leq \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}_2}(x,y)$, в том числе $\min \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}_1}(x,y) \leq \min \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}_2}(x,y)$. Следовательно, для любых $(x,z) \in X \times Z$ справедливо

$$\sup_{y \in Y}\left[\min(\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}_1}(x,y), \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(y,z))\right] \leq \sup_{y \in Y}\left[\min(\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}_2}(x,y), \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(y,z))\right],$$

что эквивалентно по определению $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ \widetilde{\mathfrak{R}}}(x,z) \leq \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}_2 \circ \widetilde{\mathfrak{R}}}(x,z)$, то есть $\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ \widetilde{\mathfrak{R}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{R}}_2 \circ \widetilde{\mathfrak{R}}$. ◄

Доказательство остальных положений утверждения предлагаем читателю выполнить самостоятельно.

***Опр.* 4.13.** *Композиционное правило вывода Заде* (*Zadeh's rule of inference composition*). Пусть U и V – два универсальных множества, на которых заданы классы нечетких подмножеств $\mathcal{F}(U)$ и $\mathcal{F}(V)$ соответственно, а $\widetilde{\mathfrak{R}}$ – нечеткое отношение на $U \times V$. Тогда:

1) отношение $\widetilde{\mathfrak{R}}$ определяет отображение $\mathcal{F}(U)$ на $\mathcal{F}(V)$ таким образом, что каждому НМ $\widetilde{A} \in \mathcal{F}(U)$ соответствует НМ $\widetilde{B} \in \mathcal{F}(V)$, функция принадлежности которого

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}(\widetilde{A})}(y) = \sup_{x \in U}\left[\min(\mu_{\widetilde{A}}(x),\ \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y))\right];$$

2) отношение $\widetilde{\mathfrak{R}}$ определяет также и обратное отображение $\mathcal{F}(V)$ на $\mathcal{F}(U)$ таким образом, что каждому НМ $\widetilde{B} \in \mathcal{F}(V)$ соответствует НМ $\widetilde{A} \in \mathcal{F}(U)$, функция принадлежности которого

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}^{-1}(\widetilde{B})}(x) = \sup_{y \in V} \left[\min(\mu_{\widetilde{B}}(y), \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}^{-1}}(y, x)) \right].$$

При этом нечеткое множество $\widetilde{B}$ называется образом, а НМ $\widetilde{A}$ – прообразом.

В матричном виде указанные выше композиционные правила записываются следующим образом:

$$\widetilde{B} = \widetilde{A} \circ \widetilde{\mathfrak{R}},$$

$$\widetilde{A} = \widetilde{B} \circ \widetilde{\mathfrak{R}}^{-1}.$$

Композиционное правило вывода лежит в основе нечеткого логического вывода, который подробнее будет рассмотрен в последующих разделах. Пока лишь отметим, что нечеткое отношение можно рассматривать как выражение взаимосвязи между нечеткими множествами (нечеткими переменными). Следовательно, композиционные правила позволяют находить нечеткий образ $\widetilde{B}$ по заданному нечеткому прообразу $\widetilde{A}$ и наоборот.

Если множества $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ имеют конечные дискретные носители, то соотношения, выражающие композиционное правило вывода, реализуемы в наглядной матричной форме.

Пример 4.5. Пусть на соответствующих универсумах X и Y заданы нечеткие множества:

$$\widetilde{A} = \frac{0}{1} + \frac{0,1}{2} + \frac{0,5}{3} + \frac{0,8}{4} + \frac{1}{5},$$

$$\widetilde{B} = \frac{1}{5} + \frac{0,8}{10} + \frac{0,4}{15} + \frac{0,2}{20}.$$

1. Полагая, что $\widetilde{B}$ – образ (выходной нечеткий сигнал), а $\widetilde{A}$ – прообраз (входной нечеткий сигнал), определить значение на выходе $\widetilde{D}$, если на вход подан сигнал $\widetilde{C} = \frac{0,3}{1} + \frac{0,5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,7}{4} + \frac{0,4}{5}$.

2. Взяв в качестве образа полученное в п. 1 нечеткое множество $\widetilde{D}$, найти его прообраз – нечеткое множество $\widetilde{C}'$.

► Сначала рассчитываем нечеткое отношение $\widetilde{\mathfrak{R}}$ на $X \times Y$ согласно правилу «если $\widetilde{A}$, то $\widetilde{B}$», применяя в качестве T-нормы операцию min, то есть степень принадлежности элемента (x_i, y_j) отношению $\widetilde{\mathfrak{R}}$ вычисляется как $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x_i, y_j) = \min(\mu_{\widetilde{A}}(x_i), \mu_{\widetilde{B}}(y_j))$. Получим матрицу отношения

$$\widetilde{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,8 & 0,8 & 0,4 & 0,2 \\ 1 & 0,8 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

По композиционному правилу вывода (опр. 4.13, п.1) находим образ $\widetilde{D}$ сигнала $\widetilde{C}$, то есть $\widetilde{D} = \widetilde{C} \circ \widetilde{\mathfrak{R}}$:

$$\widetilde{D} = \left(\frac{0,3}{1} + \frac{0,5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,7}{4} + \frac{0,4}{5} \right) \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,8 & 0,8 & 0,4 & 0,2 \\ 1 & 0,8 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{0,7}{5} + \frac{0,7}{10} + \frac{0,4}{15} + \frac{0,2}{20} \right).$$

Поясним процесс расчета степени принадлежности первого элемента $\{5\} \in Y$ выходного множества $\widetilde{D}$:

$$\mu_{\widetilde{D}}(5) = \max \begin{pmatrix} \min(0,3;\ 0) \\ \min(0,5;\ 0,1) \\ \min(1;\ 0,5) \\ \min(0,7;\ 0,8) \\ \min(0,4;\ 1) \end{pmatrix} = \max \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0,5 \\ 0,7 \\ 0,4 \end{pmatrix} = 0,7.$$

Аналогично рассчитываются степени принадлежности остальных элементов $\widetilde{D}$.

Теперь составим матрицу обратного отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}^{-1}$, которая является транспонированной по отношению к исходной:

$$\widetilde{\mathfrak{R}}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0,1 & 0,5 & 0,8 & 1\\ 0 & 0,1 & 0,5 & 0,8 & 0,8\\ 0 & 0,1 & 0,4 & 0,4 & 0,4\\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix}.$$

Используя композиционное правило (опр. 4.13, п.2), находим прообраз $\widetilde{C}'$ сигнала $\widetilde{D}$, то есть $\widetilde{C}'=\widetilde{D}\circ\widetilde{\mathfrak{R}}^{-1}$:

$$\widetilde{C}'=\left(\frac{0,7}{5}+\frac{0,7}{10}+\frac{0,4}{15}+\frac{0,2}{20}\right)\circ\begin{pmatrix}0 & 0,1 & 0,5 & 0,8 & 1\\ 0 & 0,1 & 0,5 & 0,8 & 0,8\\ 0 & 0,1 & 0,4 & 0,4 & 0,4\\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{0}{1}+\frac{0,1}{2}+\frac{0,5}{3}+\frac{0,7}{4}+\frac{0,7}{5}.$$

Интересно, что $\widetilde{C}'\neq\widetilde{C}$. Но это не ошибка в расчетах, а проявление нечеткого характера отношения.◄

Композиционное правило Заде лежит в основе различных алгоритмов нечеткого логического вывода, о чем подробно будет рассказано в последующих разделах.

Перейдем к обсуждению некоторых свойств нечетких отношений, причем для лучшего понимания начнем с классического случая.

***Опр.* 4.14.** Пусть $\mathfrak{R}$ – классическое (четкое) бинарное отношение на $U\times U$, описываемое характеристической функцией $\chi_{\mathfrak{R}}(x,y)$. Тогда, если для любых $x,y,z\in U$:

1) $\chi_{\mathfrak{R}}(x,x)=1$, то $\mathfrak{R}$ называется *рефлексивным* (*reflexive*);

2) $\chi_{\mathfrak{R}}(x,y)=1\Rightarrow\chi_{\mathfrak{R}}(y,x)=1$, то $\mathfrak{R}$ называется *симметричным* (*symmetric*);

3) $\chi_{\mathfrak{R}}(x,y)=\chi_{\mathfrak{R}}(y,z)=1\Rightarrow\chi_{\mathfrak{R}}(x,z)=1$, то $\mathfrak{R}$ называется *транзитивным* (*transitive*);

4) $\chi_{\mathfrak{R}}(x,y)=\chi_{\mathfrak{R}}(y,x)=1\Rightarrow x=y$, то $\mathfrak{R}$ называется *антисимметричным* (*anti-symmetric*).

Переходя от характеристической функции $\chi_{\mathfrak{R}}(x,y)$ четкого отношения $\mathfrak{R}$ к функции принадлежности $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y)$ нечеткого отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}$, получим следующее определение.

***Опр.* 4.15.** Пусть $\widetilde{\mathfrak{R}}$ – нечеткое бинарное отношение на $U\times U$, описываемое функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y)$. Тогда, если для любых $x,y,z\in U$:

1) $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,x)=1$, то $\widetilde{\mathfrak{R}}$ называется *рефлексивным*;

2) $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y)=\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(y,x)$, то $\widetilde{\mathfrak{R}}$ называется *симметричным*;

3) $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,z)\ge\min\left(\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y),\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(y,z)\right)$, то $\widetilde{\mathfrak{R}}$ называется *транзитивным* (по *T*-норме Заде, то есть мин-транзитивным);

4) $\left(\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y)>0 \text{ и } \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(y,x)>0\right)\Rightarrow x=y$, то $\widetilde{\mathfrak{R}}$ называется *антисимметричным* (*anti-symmetric*).

Отношение, удовлетворяющее одновременно свойствам 1-3, называется *отношением эквивалентности* (*equivalence relation*).

Для того чтобы лучше понять перечисленные свойства, рассмотрим следующий пример.

Пример 4.6. Пусть задано множество студентов: Алексей, Борис, Валентина, Галина, Даниил, Егор, описываемое в виде универсума $U=\{а,б,в,г,д,е\}$. Предложить описание: а) классического (четкого) бинарного отношения на $U\times U$ $\mathfrak{R}$ = «*x* – друг *y*»; б) нечеткого бинарного отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}$ = «*x* состоит в дружеских отношениях с *y*», где $x,y\in U$. Какими являются эти отношения?

►а) Так как отношение дискретное и конечное, то удобно его описывать матричным способом:

$$\mathfrak{R}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&1\\1&1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Из матрицы видно, что, например, Алексей дружит с Борисом, Даниилом и Егором; Борис дружит с Алексеем, Валентиной и Данииилом и т.д. Ясно, что отношение $\mathscr{R}$ симметрично, рефлексивно (мы предполагаем по умолчанию, что индивидуум является другом по отношению к самому себе), но нетранзитивно (например, Борис – друг Алексея, а Валентина – друг Бориса, но из этого не следует, что Алексей и Валентина – друзья).

б) Рассмотрим теперь нечеткое отношение $\widetilde{\mathscr{R}}$ = «*x* состоит в дружеских отношениях с *y*». Учитывая неопределенный характер понятия «дружеские отношения», можно предположить, что матрица отношения будет иметь вид:

$$\widetilde{\Re} = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 0,1 & 0,2 & 0,7 & 1 \\ 0,8 & 1 & 0,9 & 0,1 & 0,8 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 1 & 0,1 & 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 1 & 0,7 & 0,6 \\ 0,7 & 0,8 & 0,2 & 0,7 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как и $\mathscr{R}$, отношение $\widetilde{\mathscr{R}}$ симметрично, рефлексивно, попрежнему нетранзитивно. Действительно,

$$\mu_{\widetilde{\Re}}(a,в) = 0,1 < \min\left(\mu_{\widetilde{\Re}}(a,б), \mu_{\widetilde{\Re}}(б,в)\right) = \min\left(0,8;0,9\right) = 0,8. \blacktriangleleft$$

Вопросы и упражнения к разделу 4

1. Определите понятия «нечеткое отношение», «нечеткое декартово произведение НМ». Поясните разницу между ними.
2. Дайте определения носителя, ядра, α-сечения нечеткого отношения $\widetilde{\mathscr{R}}$. Как задаются бинарные отношения на непрерывных и дискретных носителях?
3. Перечислите известные вам операции над нечеткими множествами. Каковы их аналоги в случае нечетких отношений?
4. Какие виды композиций нечетких отношений вам известны?
5. Сформулируйте композиционное правило нечеткого вывода Л.Заде. Где оно применяется?
6. Что такое симметричное, рефлексивное, транзитивное, антисимметричное нечеткое отношение?
7. Пусть $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{1,4,6,10\}$. Записать на $X \times Y$ в виде матрицы нечеткое бинарное отношение $\widetilde{\mathscr{R}}$ = «*y* близко к *x*», где $x \in X$, $y \in Y$.

8. Предложите возможный вариант нечеткого отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}$ = =«*y* существенно меньше *x*», заданного на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Затем ограничьте носитель отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}$ первыми десятью натуральными числами и запишите соответствующую матрицу.
9. Пусть имеется универсум U учебных дисциплин: математика (м), физика (фз), информатика (ин), философия (фс), история (ис), электротехника (эл), компьютерная графика (кг), основы теории нечетких множеств (нм), иностранный язык (ия). Предложите возможный вариант нечеткого отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}$=«междисциплинарная взаимосвязанность» на $U\times U$. Каким является это отношение?
10. Пусть задано множество – универсум коллег по работе $U=\{а,б,в,г\}$: Алексей, Борис, Валентина, Галина. На $U\times U$ заданы два бинарных отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}_1$= «*x* состоит в дружеских отношениях с *y*» и $\widetilde{\mathfrak{R}}_2$= «*x* и *y* близки по возрасту», где $x,y\in U$. Найдите отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}_1\cup\widetilde{\mathfrak{R}}_2$, $\widetilde{\mathfrak{R}}_1\cap\widetilde{\mathfrak{R}}_2$, $\overline{\widetilde{\mathfrak{R}}_1}$. Интерпретируйте полученные результаты. Матрицы отношений даны:

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_1=\begin{pmatrix}1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}9\\ 0{,}7 & 1 & 0{,}1 & 0{,}8\\ 0{,}3 & 0{,}1 & 1 & 0{,}9\\ 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}9 & 1\end{pmatrix},\quad \widetilde{\mathfrak{R}}_2=\begin{pmatrix}1 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}2\\ 0{,}8 & 0{,}9 & 1 & 1\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

11. Заданы нечеткие отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}_1$= «*x* больше *y*» на $X\times Y$ и $\widetilde{\mathfrak{R}}_2$= «*y* приблизительно равен *z*» на $Y\times Z$, где $X=Y=Z=\{1,2,3,4\}$:

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0 & 0\\ 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0\end{pmatrix},\quad \widetilde{\mathfrak{R}}_2=\begin{pmatrix}1 & 0{,}5 & 0 & 0\\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0\\ 0 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5\\ 0 & 0 & 0{,}5 & 1\end{pmatrix}.$$

Получите матрицу отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}_1\circ\widetilde{\mathfrak{R}}_2$ (максиминная композиция отношений) и прокомментируйте ее вербальный смысл.

12. Заданы два нечетких отношения:

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,7 & 0,4 \\ 1 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \widetilde{\mathfrak{R}}_2 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 & 0 & 0,9 \\ 0,1 & 1 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Найдите их максиминную $\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ \widetilde{\mathfrak{R}}_2$ и минимаксную $\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \bullet \widetilde{\mathfrak{R}}_2$ композиции, а также композиции $\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ_{\Delta} \widetilde{\mathfrak{R}}_2$ и $\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \bullet_{\nabla} \widetilde{\mathfrak{R}}_2$, где $x \Delta y = \max(0, x+y-1)$ и $x \nabla y = \min(1, x+y)$ – T-норма и T-конорма Лукасевича соответственно, $x, y \in [0,1]$.

13. Пусть на универсуме $X = \{1,2,3,4\}$ задано нечеткое множество «малый» как $\widetilde{A} = \frac{1}{1} + \frac{0,8}{2} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,1}{4}$ и нечеткое отношение на универсуме $X \times X$ «приблизительно равны»:

$$\widetilde{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя композиционное правило вывода, получите образ $\widetilde{B}$, соответствующий прообразу $\widetilde{A}$. Прокомментируйте полученный результат.

14. Докажите положения «б», «в», «г» утверждения (с. 55).

15. Пусть $\widetilde{\mathfrak{R}}$ задано на $U \times U$. Докажите, что $\widetilde{\mathfrak{R}} \circ \widetilde{\mathfrak{R}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{R}}$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{\mathfrak{R}}$ транзитивно.

16. Пусть $\widetilde{\mathfrak{R}}_1$ и $\widetilde{\mathfrak{R}}_2$ – нечеткие отношения эквивалентности на $U \times U$. Будет ли обладать тем же свойством отношение $\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \circ \widetilde{\mathfrak{R}}_2$?

17. Пусть $\widetilde{\mathfrak{R}}_1$ и $\widetilde{\mathfrak{R}}_2$ – нечеткие отношения эквивалентности на $U \times U$. Покажите, что $\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \cap \widetilde{\mathfrak{R}}_2$ также является отношением эквивалентности. Будет ли обладать тем же свойством $\widetilde{\mathfrak{R}}_1 \cup \widetilde{\mathfrak{R}}_2$?

18. Пусть $\widetilde{\mathfrak{R}}$ задано на $U \times U$, а $\mathfrak{R}_{\alpha}$ – произвольное его α-сечение. Докажите, что: 1) $\widetilde{\mathfrak{R}}$ симметрично тогда и только

тогда, когда $\mathfrak{R}_\alpha$ – симметричные отношения при всех $0 < \alpha \le 1$; 2) $\widetilde{\mathfrak{R}}$ транзитивно (по *T*-норме Заде) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}_\alpha$ транзитивны при всех $0 < \alpha \le 1$.

19. Пусть $\widetilde{\mathfrak{R}}$ – Δ-транзитивное (то есть транзитивное по произвольной *T*-норме) и рефлексивное нечеткое отношение на $U \times U$. Покажите, что $\widetilde{\mathfrak{R}} \circ_\Delta \widetilde{\mathfrak{R}} = \widetilde{\mathfrak{R}}$.

20. Пусть $\widetilde{\mathfrak{R}}$ – нечеткое отношение на непрерывном носителе $[a,b]\times[a,b]$, описываемое своей функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y) = e^{-|x-y|}$. Докажите, что $\widetilde{\mathfrak{R}}$ – отношение эквивалентности по *T*-норме PROD, то есть покажите, что: $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,x) = 1$; $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y) = \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(y,x)$; $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,z) \ge \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y) \cdot \mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(y,z)$.

5. ОСНОВЫ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Как известно, аристотелевская логика имеет строго двузначный характер, будучи основана на абсолютных взаимоисключающих понятиях «истина» и «ложь». Вместе с тем реальным суждениям человека явно не присуща такая категоричность: индивидуум значительно чаще мыслит категориями типа «лучше» и «хуже». Таким образом, было бы естественным предложить такое расширение обычной «четкой» логики, которое было бы пригодно для моделирования человеческих умозаключений. Оно получило название «*нечеткая логика*» (*fuzzy logic*).

Вспомним, что основаниями традиционной логики принято считать силлогизмы Аристотеля, то есть наборы категорических высказываний, с помощью которых можно осуществлять строгий логический вывод. Например:

всякий человек смертен;
Аристотель – человек;
следовательно, Аристотель смертен.

Приведенный выше простейший силлогизм дает нам представление об «истинном знании» в представлении Аристотеля.

Значительно позже – в 17 веке, исходя из аристотелевской логики, Г.Лейбниц заложил основы математической логики, для которой затем в 19 веке Д.Буль создал двоичную алгебру. Булева алгебра стала основой для компьютерной техники и языков программирования. Вместе с тем в 20 веке появились исследования, в которых двоичная логика расширялась до многозначной логики (например, трехзначная логика Лукасевича – «ложь», «истина», «возможно»).

Нечеткая логика привлекательна тем, что на ее основе можно делать заключения из неоднозначных посылок. Это так называемое «*нечеткое рассуждение*» (*approximate reasoning*) в полной мере присуще человеку. В качестве примера рассмотрим следующее дедуктивное рассуждение:

избыточная масса тела увеличивает нагрузку на суставы;
повышенная нагрузка на суставы может привести к артриту;
вывод: избыточная масса тела может привести к артриту.

Наиболее яркий пример правил нечеткой логики – алгоритм параллельной парковки автомобиля [21].

Примечательно, что предикаты в таких «псевдологических» конструкциях не являются точными (в примере выше это «избыточный», «повышенная»). Классическая логика с подобного рода понятиями не может оперировать. Нечеткая логика таких ограничений не имеет.

Основными связками математической логики являются операции «и», «или», «не» и «импликация». Они описываются соответствующими *таблицами истинности* (*truth table*). Таблица истинности какого-либо высказывания в классической логике всегда содержит только нули и единицы (таблица 5.1).

Таблица 5.1

Классические таблицы истинности для операций «и», «или», «не» и «импликации»

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\overline{p}$	$p \Rightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

Нетрудно заметить, что $p \wedge q = \min\{p,q\}$, $p \vee q = \max\{p,q\}$, $\overline{p} = 1 - p$. Можно также предложить одну из формул для импликации

$$(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p \le q \\ 0, & \text{если} \quad p > q. \end{cases}$$

В классической логике переменные p и q принимают всего лишь два значения: 0 или 1. Переход к нечеткой логике предполагает расширение множества их значений до непрерывного промежутка $p, q \in [0,1]$. Как следствие, это приводит к расширению понятий булевых логических операций. Начнем с нечеткого отрицания. В дальнейшем для сокращения определение «нечеткий» будем опускать.

***Опр.* 5.1.** Отображение $N:[0,1]\to[0,1]$ называется *нечетким отрицанием* (*fuzzy negation*), если $N(0)=1$, $N(1)=0$ и N не возрастает (то есть если $x\le y$, то $N(x)\ge N(y)$).

Отрицание называется *строгим* (*strict negation*), если оно: 1) строго убывает $x<y\Rightarrow N(x)>N(y)$; 2) непрерывно.

Строгое отрицание называется *сильным отрицанием* (*strong negation*), если оно инволютивно, т.е. $N(N(x))=x$.

Пример 5.1. ► Приведем формулы некоторых нечетких отрицаний:

1. Стандартное отрицание (standard negation): $N(x)=1-x$.

2. Косинусное отрицание (cosine negation): $N(x)=\dfrac{1}{2}(1+\cos\pi x)$.

3. Отрицание Сугено (Sugeno negation): $N(x)=\dfrac{1-x}{1+\lambda x}$, $(\lambda>-1)$.

4. Отрицание Ягера (Yager's negation): $N(x)=(1-x^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}}$, $(\lambda>0)$.

Графики функций (1-4) изображены на рис. 5.1.

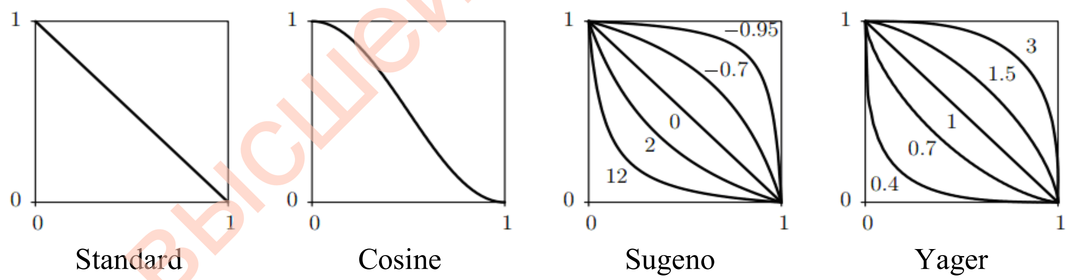


Рис. 5.1. Графики функций нечетких отрицаний к примеру 5.1

Пример 5.2. Показать, что: а) функция $N(x)=1-x$ является сильным отрицанием; б) функция

$$\eta(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x=1\\ 1, & \text{если } x\in[0,1)\end{cases}$$

является отрицанием, но нестрогим.

► а) Очевидно, что для функции $N(x)=1-x$ имеет место $N(0)=1-0=1$ и $N(1)=1-1=0$; функция непрерывна и строго убывает при $x\in[0,1]$, следовательно, $N(x)$ – строгое отрицание.

Кроме того, $N(N(x)) = N(1-x) = 1-(1-x) = x$, то есть $N(x)$ - сильное отрицание.

б) Для функции $\eta(x)$ имеет место $\eta(0)=1$ и $\eta(1)=0$. Очевидно также, что $\eta(x)$ не возрастает. Следовательно, $\eta(x)$ является отрицанием. Но эта функция не является строго убывающей и непрерывной, претерпевая разрыв при $x=1$, поэтому не является строгим отрицанием. ◄

Заметим, что в ряде источников используется альтернативное обозначение отрицания $N(x) \equiv \overline{x}$.

Для дальнейшего изложения нам необходимо еще раз вспомнить понятия треугольных норм и конорм (*T*-норм и *T*-конорм), являющихся обобщением логических операций над нечеткими множествами. Достаточно подробно этот вопрос разбирался в разделе 6 части 1 данного пособия [4].

***Опр.* 5.2.** *T-норма* (*T-norm*). Отображение (операция) вида $\Delta:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, $\Delta(x,y)=x\Delta y$ называется *T-нормой*, если оно удовлетворяет следующим четырем условиям:

- *идентичность*: $\Delta(1,x)=1\Delta x = x$;

- *коммутативность*: $\Delta(x,y)=x\Delta y = y\Delta x=\Delta(y,x)$;

- *ассоциативность*: $x\Delta(y\Delta z)=(x\Delta y)\Delta z$;

- *монотонность (неубывание)*: если $x\le u$ и $y\le w$, то $x\Delta y\le u\Delta w$.

По своему смыслу *T*-норма является расширением стандартной логической операции «И».

***Опр.* 5.3.** *T-конорма* (*T-conorm, S-norm*). Отображение (операция) вида $\nabla:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, $\nabla(x,y)=x\nabla y$ называется *T*-конормой, если оно удовлетворяет следующим четырем условиям:

- *идентичность*: $\nabla(0,x)=0\nabla x = x$;

- *коммутативность*: $\nabla(x,y)=x\nabla y = y\nabla x=\nabla(y,x)$;

- *ассоциативность*: $x\nabla(y\nabla z)=(x\nabla y)\nabla z$;

- *монотонность (неубывание)*: если $x\le u$ и $y\le w$, то $x\nabla y\le u\nabla w$.

T-конорма представляет собой обобщение стандартной логической операции «ИЛИ».

Легко показать, что для любой T-нормы и T-конормы справедливо $\Delta(x,0)=0$ и $\nabla(x,1)=1$, $\forall x\in[0,1]$. Еще одно важное утверждение приведем с доказательством.

***Утв.* 5.1.** Для любой T-нормы и T-конормы при всех $x,y\in[0,1]$ имеем $\Delta(x,y)\le x\wedge y=\min\{x,y\}$ и $\nabla(x,y)\ge x\vee y=\max\{x,y\}$, то есть T-норма Заде ограничивает сверху значения всевозможных T-норм, а T-конорма Заде – ограничивает снизу значения всевозможных T-конорм.

► В силу свойства монотонности $\Delta(x,y)\le\Delta(x,1)=x$. Также и $\Delta(x,y)=\Delta(y,x)\le\Delta(y,1)=y$. Из этих двух неравенств следует, что $\Delta(x,y)\le\min\{x,y\}=x\wedge y$.

Аналогично проводится доказательство для T-конормы.◄

Связь между T-нормами и T-конормами можно построить через сильное отрицание.

***Опр.* 5.4.** Тройка функций (Δ,∇,N) называется *триплетом де Моргана* (*De Morgan triplet*), если Δ - это T-норма, ∇ - T-конорма, N – сильное отрицание, причем они удовлетворяют закону де Моргана

$$\nabla(x,y)=N(\Delta(N(x),N(y)).$$

Из приведенного определения следует, что если (Δ,∇,N) – моргановский триплет, то $\Delta(x,y)=N(\nabla(N(x),N(y))$. Действительно, в силу инволютивности сильного отрицания

$$\nabla(N(x),N(y))=N(\Delta(N(N(x)),N(N(y)))=N(\Delta(x,y)),$$

и снова, применив отрицание к обеим частям равенства, получим

$$N(\nabla(N(x),N(y))=\Delta(x,y)\,.$$

В данном смысле T-нормы и T-конормы можно называть комплементарными.

Пример 5.3. Покажем, что T-норма и T-конорма Заде

$$\Delta_Z(x,y)=x\wedge y=\min\{x,y\} \quad \text{и} \quad \nabla_Z(x,y)=x\vee y=\max\{x,y\}$$

вместе со стандартным отрицанием $N(x)=1-x$ образуют триплет де Моргана (называемый также триплетом Гёделя [8]).

► Стандартное отрицание $N(x)=1-x$ является, очевидно, сильным отрицанием (см. пример 5.2). Остается показать, что $\nabla(x,y)=N(\Delta(N(x),N(y))$.

Имеем

$$N(\Delta_z(N(x),N(y)) = N(\min\{1-x,1-y\}) =$$

$$= \begin{cases} N(1-x), \text{ если } x > y \\ N(1-y), \text{ если } x \le y \end{cases} = \begin{cases} x, \text{ если } x > y \\ y, \text{ если } x \le y \end{cases} = \max\{x,y\} = \nabla_Z(x,y),$$

что и требовалось доказать. Заметим, что именно триплет Гёделя был взят за основу при создании Л.Заде теории нечетких множеств. ◄

Теперь мы готовы к определению важнейшего для нечеткой логики понятия «нечеткая импликация».

***Опр.* 5.5.** *Нечеткая импликация* (*fuzzy implication*). Отображение (операция) $x \Rightarrow y : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ называется нечеткой импликацией, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) соответствует классической таблице импликации, то есть $(1 \Rightarrow 0) = 0$, $(1 \Rightarrow 1) = 1$, $(0 \Rightarrow 0) = 1$, $(0 \Rightarrow 1) = 1$;

2) не возрастает по первой переменной, то есть для любого $x \in [0,1]$ $(y \Rightarrow x) \le (z \Rightarrow x)$, если $y \ge z$;

3) не убывает по второй переменой, то есть для любого $x \in [0,1]$ $(x \Rightarrow y) \ge (x \Rightarrow z)$, если $y \ge z$.

Иногда используют и такие обозначения нечеткой импликации: $I(x,y)$, $x \to y$.

Пример 5.4. Показать, что функция $I(x,y) = \max\{1-x, y\}$ является нечеткой импликацией.

► Проверим выполнение условий 1-3 предыдущего определения.

1. $I(0,0) = \max\{1-0,\ 0\} = 1$; $I(0,1) = \max\{1-0,\ 1\} = 1$;

$I(1,0) = \max\{1-1,\ 0\} = 0$; $I(1,1) = \max\{1-1,\ 1\} = 1$.

2. Пусть $y \ge z$, тогда

$$I(y,x) = \max\{1-y, x\} \le \max\{1-z, x\} = I(z,x).$$

3. Пусть $y \ge z$, тогда

$$I(x,y) = \max\{1-x, y\} \ge \max\{1-x, z\} = I(x,z).$$

Вывод: данная функция является нечеткой импликацией. ◄

Для сокращения записей будем опускать определение «нечеткая».

***Опр.* 5.6.** Пусть ∇ – некоторая *T*-конорма, а *N* – сильное отрицание. Тогда функция $I_\nabla(x,y) = \nabla(N(x), y)$ называется *S*-импликацией.

***Утв.* 5.2.** *S*-импликация является импликацией.

► Пусть $I_\nabla(x,y)=\nabla(N(x),y)$ – *S*-импликация. Предположим $x\le z$. Тогда $N(x)\ge N(z)$ и по свойству монотонности *T*-конормы $\nabla(N(x),y)\ge\nabla(N(z),y)$, то есть $I_\nabla(x,y)$ – невозрастающая функция по первому аргументу. Будучи конормой, функция $I_\nabla(x,y)$ также не убывает по второму аргументу y.

S-импликация полностью соответствует классической таблице импликации. Действительно:

$$I_\nabla(1,0)=\nabla(N(1),0)=\nabla(0,0)=0;$$
$$I_\nabla(0,0)=\nabla(N(0),0)=\nabla(1,0)=1;$$
$$I_\nabla(0,1)=\nabla(N(0),1)=\nabla(1,1)=1;$$
$$I_\nabla(1,1)=\nabla(N(1),1)=\nabla(0,1)=1.$$

Все три условия определения 5.5 выполнены, то есть $I_\nabla(x,y)$ – импликация. ◄

Замечание: можно показать, что если $I(x,y)$ – *S*-импликация, то $I(N(y),N(x))$ – также *S*-импликация.

***Опр.* 5.7.** Пусть Δ – некоторая *T*-норма. Тогда функция

$$I_\Delta(x,y)=\sup\{z\,|\,\Delta(x,z)\le y\}$$

называется *R*-импликацией (*residual implication*, [8]).

***Утв* 5.3.** *R*-импликация является импликацией.

► Пусть $I_\Delta(x,y)=\sup\{z\,|\,\Delta(x,z)\le y\}$ – *R*-импликация. Предположим $x_1\le x_2$. Тогда по свойству монотонности *T*-нормы имеем $\Delta(x_1,z)\le\Delta(x_2,z)$ для всякого $z\in[0,1]$.

Если $z_0\in\{z\,|\,\Delta(x_2,z)\le y\}$, то $z_0\in\{z\,|\,\Delta(x_1,z)\le y\}$. Другими словами, $\{z\,|\,\Delta(x_2,z)\le y\}\subseteq\{z\,|\,\Delta(x_1,z)\le y\}$. Тогда

$$I_\Delta(x_2,y)=\sup\{z\,|\,\Delta(x_2,z)\le y\}\le\sup\{z\,|\,\Delta(x_1,z)\le y\}=I_\Delta(x_1,y).$$

То есть функция $I_\Delta(x,y)$ - невозрастающая по первому аргументу.

Покажем теперь, что $I_\Delta(x,y)$ не убывает по второму аргументу.

Предположим $y_1\le y_2$. Тогда для любых $x\in[0,1]$ имеем

$$\{z\,|\,\Delta(x,z)\le y_1\}\subseteq\{z\,|\,\Delta(x,z)\le y_2\}.$$

Следовательно,

$$I_\Delta(x, y_1) = \sup\{z \mid \Delta(x,z) \le y_1\} \le \sup\{z \mid \Delta(x,z) \le y_2\} = I_\Delta(x, y_2).$$

Проверим выполнение таблицы классической импликации:

$$I_\Delta(1,0) = \sup\{z \mid \Delta(1,z) \le 0\} = 0;$$

$$I_\Delta(0,0) = \sup\{z \mid \Delta(0,z) \le 0\} = 1;$$

$$I_\Delta(0,1) = \sup\{z \mid \Delta(0,z) \le 1\} = 1;$$

$$I_\Delta(1,1) = \sup\{z \mid \Delta(1,z) \le 1\} = 1.$$

Утверждение доказано. ◄

Замечание: легко также убедиться, что $I_\Delta(x,x) = 1, \forall x \in [0,1]$.

Перечислим часто используемые нечеткие импликации.

1. *Импликация Гёделя* (*Gödel's implication*):

$$(x \Rightarrow y) = G(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \le y \\ y, & \text{если } x > y. \end{cases}$$

Это R-импликация, где $\Delta(x,y) = \min\{x,y\}$.

2. *Импликация Гогена* (*Goguen's implication*):

$$(x \Rightarrow y) = Gn(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \le y \\ \dfrac{x}{y}, & \text{если } x > y. \end{cases}$$

Это R-импликация, где $\Delta(x,y) = xy$.

3. *Импликация Лукасевича* (*Lukasiewicz's implication*):

$$(x \Rightarrow y) = L(x,y) = \min\{1 - x + y, 1\}.$$

Это R-импликация, где $\Delta(x,y) = \max\{x + y - 1, 0\}$ – T-норма Лукасевича. Одновременно она является также S-импликацией с T-конормой Лукасевича $\nabla(x,y) = \min\{x + y, 1\}$ и стандартным отрицанием $N(x) = 1 - x$.

4. *Импликация Клини – Динса* (*Kleene – Diene's implication*):

$$(x \Rightarrow y) = KD(x,y) = \max\{1 - x, y\}.$$

Это S-импликация с T-конормой $\nabla(x,y) = \max\{x,y\}$ и со стандартным отрицанием $N(x) = 1 - x$.

5. *Импликация Рейхенбаха* (*Reichenbach's implication*):

$$(x \Rightarrow y) = R(x,y) = 1 - x + xy.$$

Это S-импликация с T-конормой $\nabla(x,y)=x+y-xy$ и со стандартным отрицанием $N(x)=1-x$.

6. *Импликация Гейнса – Решера* (*Gaines – Rescher's implication*):

$$(x\Rightarrow y)=GR(x,y)=\begin{cases}1, & \text{если } x\le y\\ 0, & \text{если } x>y.\end{cases}$$

7. *Импликация Ву* (*Wu's implication*):

$$(x\Rightarrow y)=W(x,y)=\begin{cases}1, \text{ если } x\le y\\ \min\{1-x,y\}, \text{ если } x>y.\end{cases}$$

У читателя может возникнуть вопрос: зачем столько времени уделяется рассмотрению нечеткой импликации и для чего существует столько ее видов? Ответ прост: посредством нечеткой импликации можно моделировать различные способы нечеткого логического вывода, например *нечеткий модус поненс* (*fuzzy modus ponens*):

$$p\Rightarrow q: \text{ЕСЛИ } x \text{ есть } \widetilde{A}, \text{ ТО } y \text{ есть } \widetilde{B};$$

антецедент: x есть $\widetilde{A}$;

консеквент: y есть $\widetilde{B}$.

В данной логической конструкции *антецедент* (*antecedent*) – это предпосылка, *консеквент* (*consequent*) – следствие.

Заметим, что нечеткая импликация может быть выражена нечетким бинарным отношением $\widetilde{\mathfrak{R}}$, заданным на универсуме $U\times V$ своей функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y)=[\mu_{\widetilde{A}}(x)\Rightarrow\mu_{\widetilde{B}}(y)]$.

Безусловно, значение высказывания «если x есть $\widetilde{A}$, то y есть $\widetilde{B}$» зависит от типа выбранной импликации (исследователь имеет свободу выбора в зависимости от особенностей моделируемой системы).

В случае классической (четкой) импликации, то есть когда $\mu_A(x)\in\{0,1\}$ и $\mu_B(y)\in\{0,1\}$, возникает отношение со следующей функцией принадлежности, а точнее характеристической функцией:

$$\mu_{\mathfrak{R}}(x,y)=\chi_{\mathfrak{R}}(x,y)=[\chi_A(x)\Rightarrow\chi_B(y)]=$$

$$=\begin{cases}1, \text{ если} \left(x\notin \mathrm{A}, y - \text{произвольный}\right) \text{или} \left(x\in\mathrm{A} \text{ и } y\in\mathrm{B}\right)\\ 0, \text{ если } x\in\mathrm{A} \text{ и } y\notin\mathrm{B},\end{cases}$$

что равносильно

$$\sup_{x\in U}\left[\chi_{\mathfrak{R}}(x,y)\wedge\chi_A(x)\right]=\begin{cases}1, & \text{если } y\in B\\ 0, & \text{если } y\notin B\end{cases}=\chi_B(y).$$

Получается, что в классическом случае модус поненс выражается следующей формулой:

$$\chi_B(y) = \sup_{x \in U}\left[\chi_{\mathfrak{R}}(x,y) \wedge \chi_A(x)\right].$$

Это значит, что классический модус поненс представим в виде уже известного нам максиминного композиционного правила вывода $B = A \circ \mathfrak{R}$, где четкое отношение $\mathfrak{R}$ является импликацией «если $x \in A$, то $y \in B$».

Теперь можно распространить классический модус поненс на нечеткий случай: это обобщение принято называть *нечеткий модус поненс* (*fuzzy modus ponens*) и обобщенный модус поненс (*generalized fuzzy modus ponens*). Например, силлогизм вида:

Правило: *если банан желтый, то он спелый;*

Предпосылка: *банан желтый;*

Заключение: *банан спелый.*

Нечеткая логика представляет собой мощное средство моделирования правил подобного вида. Действительно, определения типа «желтый», «спелый» могут быть представлены в виде соответствующих нечетких множеств своими функциями принадлежности. Логические связки («И», «ИЛИ», «НЕ», «ЕСЛИ – ТО») описываются с помощью различных T-норм и T-конорм, отрицаний и импликаций.

Заключение, представляющее собой нечеткое множество, получаем при помощи принципа обобщения Заде, переходом от характеристических функций к функциям принадлежности, а также путем замены операции $\wedge$ на некоторую T-норму Δ:

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \sup_{x \in U}\left[\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y)\Delta\mu_{\widetilde{A}}(x)\right].$$

Данное выражение описывает *нечеткий модус поненс*, то есть правило нечеткого вывода:

Правило: *если* x *есть* $\widetilde{A}$, *то* y *есть* $\widetilde{B}$;

Антецедент: x *есть* $\widetilde{A}$;

Консеквент: y *есть* $\widetilde{B}$.

Можно сделать указанное правило вывода еще более общим (*обобщенный нечеткий модус поненс*):

Правило: *если* x *есть* $\widetilde{A}$, *то* y *есть* $\widetilde{B}$;

Антецедент: x *есть* $\widetilde{A^*}$;

Консеквент: y *есть* $\widetilde{B^*}$.

В последнем случае ФП множества $\widetilde{B^*}$ определяется как

$$\mu_{\widetilde{B^*}}(y) = \sup_{x \in U}\left[\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y)\Delta\mu_{\widetilde{A^*}}(x)\right]$$

или короче (по аналогии с композиционным правилом вывода)

$$\widetilde{B^*} = \widetilde{\mathfrak{R}}(\widetilde{A^*}) = \widetilde{A^*} \circ_{\Delta} \widetilde{\mathfrak{R}},$$

где $\circ_{\Delta}$ – это композиция $\circ$, в которой операция минимума заменена произвольной T-нормой Δ.

Для лучшего понимания нечеткого модус поненс рассмотрим пример с дискретными конечными НМ.

Пример 5.5. Пусть заданы нечеткие множества:

$$\widetilde{A} = \frac{0,4}{x_1} + \frac{1,0}{x_2} + \frac{0,6}{x_3} \quad \text{и} \quad \widetilde{B} = \frac{0,8}{y_1} + \frac{0,4}{y_2},$$

$$\widetilde{A^*} = \frac{0,6}{x_1} + \frac{0,9}{x_2} + \frac{0,7}{x_3},$$

импликация Лукасевича $(x \Rightarrow y) = \min\{(1 - x + y),1\}$, а в качестве T-нормы принимается минимум.

Получить вывод для антецедента $\widetilde{A}$, применяя нечеткий модус поненс, а также вывод для антецедента $\widetilde{A^*}$ через обобщенный модус поненс.

► Вспомним, что нечеткая импликация задается отношением с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{\mathfrak{R}}}(x,y) = \left(\mu_{\widetilde{A}}(x) \Rightarrow \mu_{\widetilde{B}}(y)\right)$, поэтому в случае импликации Лукасевича $(x \Rightarrow y) = \min\{(1 - x + y),1\}$ матрица отношения будет иметь вид

$$\widetilde{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} 1,0 & 1,0 \\ 0,8 & 0,4 \\ 1,0 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Так как нечеткий антецедент $\widetilde{A} = \frac{0,4}{x_1} + \frac{1,0}{x_2} + \frac{0,6}{x_3}$, а в качестве T-номы берется минимум, то вывод через нечеткий модус поненс находится по правилам обычной максиминной композиции (см. раздел 4):

$$\widetilde{B'} = \widetilde{\mathfrak{R}}(\widetilde{A}) = \widetilde{A} \circ \widetilde{\mathfrak{R}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,4 & 1,0 & 0,6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1,0 & 1,0 \\ 0,8 & 0,4 \\ 1,0 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \end{pmatrix},$$

то есть нечеткому антецеденту $\widetilde{A}$ соответствует нечеткий консеквент $\widetilde{B'} = \dfrac{0,8}{y_1} + \dfrac{0,6}{y_2}$.

Интересен тот факт, что $\widetilde{B} \neq \widetilde{B'}$, но вместе с тем $\widetilde{B} \subset \widetilde{B'}$. В некотором смысле можно считать, что $\widetilde{B}$ является «оптимальным» нечетким выводом. На данном примере мы наблюдаем существенные особенности нечеткого модус поненс, не присущие классической логике: в общем случае $\widetilde{\mathfrak{R}}(\widetilde{A}) \neq \widetilde{B}$ (разумеется, в зависимости от выбранного вида импликации). Только в классическом случае с необходимостью $\mathfrak{R}(A) = B$.

Теперь возьмем в качестве антецедента нечеткое множество $\widetilde{A^*} = \dfrac{0,6}{x_1} + \dfrac{0,9}{x_2} + \dfrac{0,7}{x_3}$ и выведем заключение:

$$\widetilde{B^*} = \widetilde{A^*} \circ \widetilde{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,9 & 0,7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1,0 & 1,0 \\ 0,8 & 0,4 \\ 1,0 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,7 \end{pmatrix},$$

то есть $\widetilde{B^*} = \dfrac{0,8}{y_1} + \dfrac{0,7}{y_2}$. ◄

Пример 5.6. Пусть T-норма задается произведением, то есть $x \Delta y = xy$, а импликация

$$(x \Rightarrow y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0 \\ 1 \wedge \dfrac{y}{x}, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Пусть нечеткие числа $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ заданы своими ФП $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ и $\mu_{\widetilde{B}}(y)$ соответственно. Выяснить, является ли $\widetilde{B}$ нечетким выводом для антецедента $\widetilde{A}$, то есть выполняется ли $\widetilde{\mathfrak{R}}(\widetilde{A}) = \widetilde{B}$?

► Для данного типа импликации при всех значениях переменных

$$\left(\mu_{\tilde{A}}(x) \Rightarrow \mu_{\tilde{B}}(y)\right) \cdot \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y).$$

Тогда для заданного типа T-нормы

$$\tilde{\mathfrak{R}}(\tilde{A}) = \sup_{x \in U}\left[\mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x,y)\Delta\mu_{\tilde{A}}(x)\right] =$$

$$= \sup_{x \in U}\left[\left(\mu_{\tilde{A}}(x) \Rightarrow \mu_{\tilde{B}}(y)\right) \cdot \mu_{\tilde{A}}(x)\right] = \sup_{x \in U}\left[\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)\right] =$$

$$= 1 \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\tilde{B}}(y) = \tilde{B}.$$

Да, выполняется: $\tilde{\mathfrak{R}}(\tilde{A}) = \tilde{B}$. ◄

Вопросы и упражнения к разделу 5

1. Функция $N_\lambda(x) = \dfrac{1-x}{1+\lambda x}$, где $\lambda > -1$, называется параметрическим отрицанием Сугено (или λ-дополнением). Покажите, что $N_\lambda(x)$ - строгое отрицание.
2. Покажите, что параметрическое отрицание Ягера $N_\alpha(x) = \left(1 - x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, где $\alpha > 0$, является строгим отрицанием.
3. Покажите, что для любой T-нормы и T-конормы справедливо $\Delta(x,0) = 0$ и $\nabla(x,1) = 1$, $\forall x \in [0,1]$.
4. Докажите, что вероятностные произведение и сумма $\Delta_{\Pr}(x,y) = xy$, $\nabla_{\Pr}(x,y) = x + y - xy$ являются T-нормой и T-конормой соответственно. Выясните, образуют ли они моргановский триплет вместе со стандартным отрицанием $N(x) = 1 - x$.
5. Выполните задание 4 для операций Лукасевича:
$$\Delta_L(x,y) = (x+y-1) \vee 0, \quad \nabla_L(x,y) = (x+y) \wedge 1.$$
6. Выполните задание 4 для операций «нильпотентный минимум» и «нильпотентный максимум»:
$$\Delta_0(x,y) = \begin{cases} x \wedge y, \text{ если } x + y > 1 \\ 0 \text{ иначе,} \end{cases}$$
$$\nabla_0(x,y) = \begin{cases} x \vee y, \text{ если } x + y < 1 \\ 1 \text{ иначе.} \end{cases}$$

7. Покажите, что функции

$$I_1(x,y) = \min\{1 - x + y, 1\},$$

$$I_2(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \le y \\ \dfrac{y}{x}, \text{ если } x > y \end{cases}$$

являются нечеткими импликациями.

8. Докажите, что если I – нечеткая импликация, а N – отрицание, то $I'(x,y) = I(N(y), N(x))$ – также нечеткая импликация.
9. Докажите, что если $I(x,y)$ – нечеткая импликация, то $I(0,x) = 1$, $I(x,1) = 1$ для $\forall x \in [0,1]$.
10. Докажите, что если $I(x,y)$ – S-импликация, то и $I(N(y), N(x))$ – также S-импликация.
11. Является ли S-импликацией и/или R-импликацией: а) импликация Гейнса – Решера, б) импликация Ву?
12. Пусть заданы два нечетких числа: $\tilde{u} = tr[2,7,10](x)$ и $\tilde{v} = tz[3,4,5,7](x)$. Найдите $I(\tilde{u}, \tilde{v})$ и представьте результат графически, если I: а) импликация Гёделя; б) импликация Клини – Динса.
13. Решите пример 5.5, взяв T-норму $x\Delta y = xy$, а импликацию: а) Гёделя, б) Клини – Динса. Как изменились результаты?
14. Пусть T-норма задана произведением $x\Delta y = xy$. Проверить, выполняется ли $\tilde{\mathfrak{R}}(\tilde{A}) = \tilde{B}$ для нечеткого модус поненс в случае: а) импликации Рейхенбаха; б) импликации Ву.

6. НЕЧЕТКИЙ ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД

В процессе обмена информацией между людьми часто используются принципиально иные переменные, значениями которых являются не числа, а слова. Одним из первых исследований, в котором такие переменные упоминаются, является работа Л.Заде «Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений» [2]. В ней определяется так называемая «лингвистическая переменная», т.е. переменная, значениями которой являются слова, словосочетания или даже целые предложения естественного или искусственного языка. Например, лингвистическая переменная «возраст» может принимать такие, как принято говорить, вербальные значения: младенческий, очень молодой, молодой, юный, средних лет, не очень молодой, пожилой, престарелый, старый, очень старый и т.п.

Одна из основных задач нечеткой логики – научиться получать заключения на основе нечеткой информации, то есть осуществлять нечеткий логический вывод. В самом общем виде система нечеткого вывода состоит из лингвистических переменных, нечетких правил и механизма нечеткого вывода. При этом лингвистические переменные позволяют описывать языковые выражения в виде математических соотношений. Нечеткие правила устанавливают связи между входными и выходными данными, причем интуитивным образом. Механизм нечеткого вывода представляет собой математическую модель приближенных суждений и осуществляется посредством интерполирования между нечеткими правилами.

Л.Заде указывает, что благодаря использованию «принципа обобщения» (см. раздел 2) большая часть уже имеющегося классического математического аппарата может быть адаптирована и к таким необычным, на первый взгляд, объектам, какими являются лингвистические переменные. Вот так сформировалось новое направление, которое весьма метко назвали «исчисление лингвистических переменных».

Появлению лингвистической переменной предшествовала более простая «нечеткая переменная», которая определялась как трехместный кортеж (триплет) вида $< a, X, \widetilde{A} >$, где a – наименование (идентификатор) нечеткой переменной; X – область ее определения (универсум); $\widetilde{A}$ – нечеткое подмножество X, описывающее возможные значения, которые может принимать нечеткая переменная a (обычно задается через функцию принадлежности).

Простой пример нечеткой переменной – «горячий кофе». Она может быть представлена следующим триплетом:

$$<\text{Горячий кофе}, \{x \mid 0°\text{C} < x < 100°\text{C}\},\ \widetilde{A} = \{< x, \mu_{\widetilde{A}}(x) >\} >.$$

Теперь мы готовы конкретизировать понятие лингвистической переменной.

***Опр.* 6.1.** *Лингвистическая переменная, ЛП* (*linguistic variable, LV*) в смысле Л.Заде – это кортеж следующего вида:

$$LV = (X, T, U, G, S),$$

где X – имя (идентификатор) лингвистической переменной;

T – терм-множество (*term set*), то есть множество значений лингвистической переменной;

U – универсальное множество (универсум);

G – множество синтаксических правил (*grammar*), применяемое для составления правильных выражений в терм-множестве T;

S – множество семантических правил (*semantics*), задающих отображение $T \to \mathcal{F}(U)$, которое определяет семантику – нечеткое множество на U – для каждого терма в T.

В качестве универсума U обычно принимается множество действительных чисел, то есть в смысле приведенного определения происходит как бы «оцифровка» лингвистической переменной.

Для наглядности представим основные составляющие лингвистической переменной на рис. 6.1.

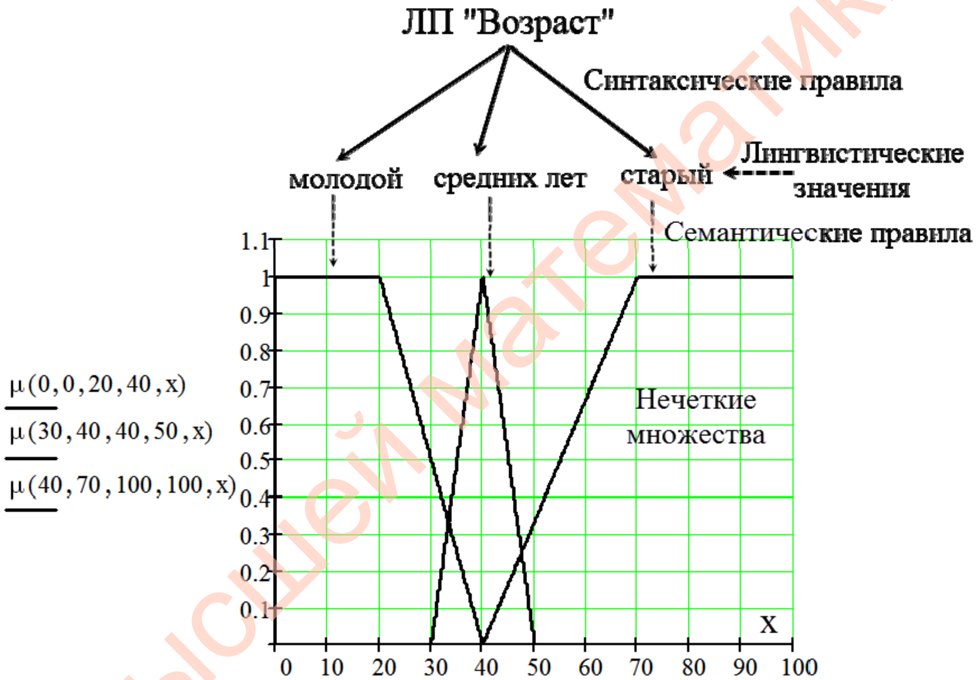


Рис. 6.1. Структура лингвистической переменной
(на примере ЛП «возраст»)

Как следует из определения, ЛП можно сравнить со специфическим отображением, которое переводит лингвистические термы в нечеткие множества. Терм, состоящий из одного слова или из нескольких слов, всегда фигурирующих вместе друг с другом, называется атомарным термом. Терм, который состоит более чем из одного атомарного терма, называется составным термом. Семантическая процедура S позволяет поставить в соответствие каждому новому значению данной лингвистической переменной, получаемому с помощью процедуры G, некоторое осмысленное содержание посредством формирования соответствующего нечеткого множества.

Лингвистические переменные нашли широчайшее применение в таких сферах, как искусственный интеллект, лингвистика, психология, распознавание образов и речи, поиск информации, медицинская диагностика и др.

Пример 6.1. ► Рассмотрим лингвистическую переменную

$$LV = (\text{Возраст},\ T,\ U,\ G,\ S),$$

где T = {молодой, очень молодой, очень-очень молодой,…, средних лет, старый, очень старый,…};

$U = \{0,\ 1, \ldots, 100\}$ – универсальное множество возможных значений возраста, лет;

G: молодой$\in G$, средних лет$\in G$, старый$\in G$. Если $x \in G$, то (очень x)$\in G$;

$S : T \to \mathcal{F}(U)$: $S(\text{молодой}) = s_1$, где $s_1 = tz[0,0,20,40]$;

$S(\text{средних лет}) = s_2$, где $s_2 = tr[30,40,50]$;

$S(\text{старый}) = s_3$, где $s_3 = tz[40,70,100,100]$;

$S(\text{очень}^n\text{молодой}) = s_1^n$, $S(\text{очень}^n\text{старый}) = s_3^n$, $n = 2,3,\ldots$

Основные термы лингвистической переменной «возраст» изображены на рис. 6.1. ◄

Обращаем внимание читателя на использование лингвистических модификаторов для трансформации термов (типа молодой – очень молодой). Подробнее об этих конструкциях можно почитать в разделе 8 части 1 данного пособия [4].

Для моделирования экспертного мнения или знаний, выражаемых лингвистическими переменными, используются *нечеткие правила* (*fuzzy rules*). Нечетким правилом обычно называют триплет вида $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{\mathfrak{R}})$, состоящий из антецедента (предпосылки) $\widetilde{A} \in \mathcal{F}(U)$, консеквента (следствия) $\widetilde{B} \in \mathcal{F}(V)$, связанных через нечеткое отношение $\widetilde{\mathfrak{R}} \in \mathcal{F}(U \times V)$.

Простейшее нечеткое правило может быть записано в виде

$$\text{ЕСЛИ } x \text{ есть } \widetilde{A}, \text{ ТО } y \text{ есть } \widetilde{B}.$$

Например: ЕСЛИ температура низкая, ТО нагрев сильный.

ЕСЛИ температура немного высокая, ТО охлаждение небольшое.

В соответствии с интерпретацией Mamdani & Assilian [20] нечеткое правило определяется через нечеткое отношение.

***Опр.* 6.2.** Нечеткое правило вида

$$\boxed{\text{ЕСЛИ } x \text{ есть } \tilde{A}, \text{ ТО } y \text{ есть } \tilde{B}} \text{ –}$$

это нечеткое отношение одного из следующих типов:

- правило Мамдани

$$\tilde{\mathfrak{R}}_M(x, y) = \tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(y);$$

- правило Ларсена

$$\tilde{\mathfrak{R}}_L(x, y) = \tilde{A}(x) \cdot \tilde{B}(y);$$

- правило, порожденное T-нормой:

$$\tilde{\mathfrak{R}}_T(x, y) = \tilde{A}(x) \Delta \tilde{B}(y),$$

где Δ – произвольная T-норма;

- правило Гёделя

$$\tilde{\mathfrak{R}}_G(x, y) = \tilde{A}(x) \Rightarrow \tilde{B}(y),$$

где $\Rightarrow$ – импликация Гёделя;

- R-правило Гёделя

$$\tilde{\mathfrak{R}}_R(x, y) = \tilde{A}(x) \Rightarrow_\Delta \tilde{B}(y),$$

где $\Rightarrow_\Delta$ – R-импликация по T-норме Δ.

Во многих технических приложениях нечеткие правила часто имеют несколько антецедентов, соединенных конъюнктивно (И) или дизъюнктивно (ИЛИ). Например

$$\boxed{\text{ЕСЛИ } x \text{ есть } \tilde{A} \text{ И } y \text{ есть } \tilde{B}, \text{ ТО } z \text{ есть } \tilde{C}.}$$

В таком случае естественно скомбинировать антецеденты с использованием нечеткого отношения

$$\tilde{\mathfrak{R}}(x, y) = \tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(y),$$

которое можно рассматривать как новое нечеткое множество – антецедент. Тогда в данном случае нечеткое правило Мамдани примет вид

$$\tilde{\mathfrak{R}}_M(x, y, z) = \tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(y) \wedge \tilde{C}(z),$$

а правило Гёделя

$$\tilde{\mathfrak{R}}_G(x, y, z) = \tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(y) \Rightarrow \tilde{C}(z).$$

Заметим, что следует избегать применения импликации между самими антецедентами, так как они, как правило, не имеют причинно-следственной связи друг с другом.

Естественно, в более или менее реальных системах недостаточно одного правила для обоснованного вывода. Обычно используются конечные множества (наборы) правил, которые принято называть *базами нечетких правил* (*fuzzy rule base*).

Пример 6.2. Попробуем сформулировать, какой может быть база нечетких правил для поддержания комфортной температуры воздуха в помещении.

► (1) Если холодно, то нагрев сильный,
(2) Если прохладно, то нагрев умеренный,
(3) Если комфортно, то нагрев отключен,
(4) Если тепло, то охлаждение умеренное,
(5) Если жарко, то охлаждение сильное.

Ясно, что «холодно», «прохладно», «комфортно», «тепло», «жарко» – это термы ЛП «температура воздуха в помещении», задаваемые как нечеткие множества $\widetilde{A}_i \ (i=\overline{1,5})$ своими функциями принадлежности.

Пусть доступны режимы работы кондиционера: «нагрев сильный» $(\widetilde{B}_1)$, «нагрев умеренный» $(\widetilde{B}_2)$ и т.д. Тогда в общем виде базу нечетких правил 1-5 можно записать как

ЕСЛИ температура есть $\widetilde{A}_i$, ТО режим есть $\widetilde{B}_i$, $i=\overline{1,5}$. ◄

Расширяя определение 6.2, мы приходим к математическому представлению базы нечетких правил в виде нечеткого отношения.

***Опр.* 6.3.** *База нечетких правил* (по Мамдани – Ассилиану)

$$\boxed{\text{ЕСЛИ } x \text{ есть } \widetilde{A}_i, \text{ТО } y \text{ есть } \widetilde{B}_i, \ (i=\overline{1,n})}\ –$$

это нечеткое отношение одного из следующих типов:

- база правил Мамдани

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_M(x,y)=\bigvee_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\wedge\widetilde{B}_i(y);$$

- база правил Ларсена

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_L(x,y)=\bigvee_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\cdot\widetilde{B}_i(y);$$

- база правил типа макс-T-норма

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_T(x,y)=\bigvee_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\Delta\widetilde{B}_i(y),$$

где Δ – произвольная T-норма;

- база правил Гёделя (типа мин-импликация)

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_G(x,y)=\bigwedge_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\Rightarrow\widetilde{B}_i(y),$$

где $\Rightarrow$ – импликация Гёделя;

- *R*-база правил Гёделя

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_R(x,y)=\bigwedge_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\Rightarrow_{\Delta}\widetilde{B}_i(y),$$

где $\Rightarrow_{\Delta}$ - *R*-импликация по *T*-норме Δ.

Точно так же, как и в случае единственного правила, в случае нечеткой базы правил часто могут присутствовать два и более антецедентов, соединенных конъюнктивно (И) или дизъюнктивно (ИЛИ). Например,

$$\text{ЕСЛИ } x \text{ есть } \widetilde{A}_i \text{ И } y \text{ есть } \widetilde{B}_i\text{, ТО } z \text{ есть } \widetilde{C}_i\,,\ (i=\overline{1,n}).$$

В таком случае естественно скомбинировать антецеденты с использованием нечеткого отношения

$$\widetilde{\mathfrak{R}}(x,y)=\widetilde{A}_i(x)\wedge\widetilde{B}_i(y),$$

которое можно рассматривать как новое нечеткое множество – антецедент. При этом, к примеру, нечеткое правило Мамдани будет

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_M(x,y,z)=\bigvee_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\wedge\widetilde{B}_i(y)\wedge\widetilde{C}_i(z),$$

а правило Гёделя

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_G(x,y,z)=\bigwedge_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\wedge\widetilde{B}_i(y)\Rightarrow\widetilde{C}_i(z).$$

Пример 6.3. Математически формализуем базу нечетких правил для контроля температуры в помещении, описанную в примере 6.2.

► Пусть градации охлаждения / нагрева изменяются в диапазоне [-2, 2], т.е. -2 – сильное охлаждение, -1 – умеренное охлаждение, 0 – нагрев/охлаждение отключено, +1 – умеренный нагрев, +2 – сильный нагрев. Соответствующие нечеткие множества консеквентов обозначим $\widetilde{H}_i,\ i=\overline{1,5}$. Опишем их при помощи треугольных нечетких чисел:

$$\widetilde{H}_1=tr[-2,-2,-1],\ \widetilde{H}_2=tr[-2,-1,0],$$

$$\widetilde{H}_3=tr[-1,0,1],\ \widetilde{H}_4=tr[0,1,2],\ \widetilde{H}_5=tr[1,2,2].$$

Пусть $U=[0,\ 50]$ – универсальное множество возможных значений температуры в помещении, ^{0}С.

Основные термы лингвистической переменной «Температура, ^{0}С»: *T*={холодно, прохладно, комфортно, тепло, жарко} опишем с помощью треугольных и трапециевидных нечетких чисел, используя наши собственные представления о комфорте:

$$\widetilde{T}_1=tz[0,0,10,15],\ \widetilde{T}_2=tr[12,16,20],$$

$$\widetilde{T}_3 = tr[18,22,25],\ \ \widetilde{T}_4 = tr[23,27,32],$$
$$\widetilde{T}_5 = tz[30,35,50,50].$$

Нечеткая база правил Мамдани будет иметь вид

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_M(x,y) = \bigvee_{i=1}^{5} \widetilde{H}_i(x) \wedge \widetilde{T}_i(y).$$

Изобразим полученное отношение графически, используя программу MathCad (см. рис. 6.2). ◄

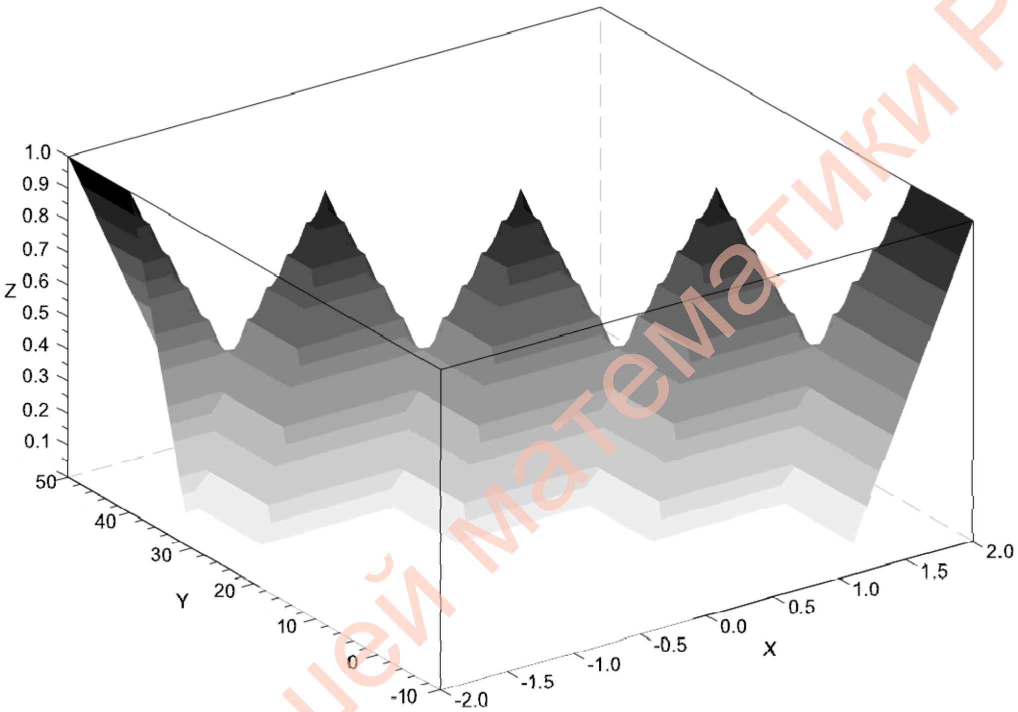


Рис. 6.2 База нечетких правил Мамдани для примера 6.3

Теперь мы полностью готовы к обсуждению *нечеткого вывода* (*fuzzy inference*), который представляет собой процесс получения заключения для заданных входных переменных, которые, возможно, до этого момента никогда не встречались.

Основное правило для системы нечеткого вывода, основанное на классическом modus ponens, сформулировал Л.Заде (оно так и называется: «*композиционное правило вывода*» – *compositional rule of inference*) [25].

Композиционное правило вывода имеет следующую структуру:

ЕСЛИ x есть $\widetilde{A}_i$, ТО y есть $\widetilde{B}_i$, $(i = \overline{1,n})$,
фактически: x есть $\widetilde{A}'$,
вывод: y есть $\widetilde{B}'$

Поясним сущность этого правила.

Пусть задана база нечетких правил в виде отношения $\widetilde{\mathfrak{R}} \in \mathcal{F}(U \times V)$. Тогда композиционное правило вывода есть отображение $F: \mathcal{F}(U) \Rightarrow \mathcal{F}(V)$, определяемое как $\widetilde{B}' = F(\widetilde{A}') = \widetilde{A}' * \widetilde{\mathfrak{R}}$, где * – композиция нечетких отношений (заданная одним из способов), т.е. $*: \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U \times V) \Rightarrow \mathcal{F}(V)$. В зависимости от вида композиции конкретизируем композиционное правило вывода в следующем определении.

***Опр.* 6.4.** Нечеткий композиционный вывод:

- Мамдани

$$\widetilde{B}'(y) = \widetilde{A}' \circ \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y) = \bigvee_{x \in X} \widetilde{A}'(x) \wedge \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y);$$

- Ларсена

$$\widetilde{B}'(y) = \widetilde{A}' \circ_L \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y) = \bigvee_{x \in X} \widetilde{A}'(x) \cdot \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y);$$

- обобщенный модус поненс (GMP)

$$\widetilde{B}'(y) = \widetilde{A}' \circ_T \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y) = \bigvee_{x \in X} \widetilde{A}'(x) \Delta \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y),$$

где Δ – произвольная T-норма;

- Гёделя

$$\widetilde{B}'(y) = \widetilde{A}' \triangleleft \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y) = \bigwedge_{x \in X} \widetilde{A}'(x) \Rightarrow \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y),$$

где $\Rightarrow$ – импликация Гёделя;

- R-вывод Гёделя

$$\widetilde{B}'(y) = \widetilde{A}' \triangleleft_\Delta \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y) = \bigwedge_{x \in X} \widetilde{A}'(x) \Rightarrow_\Delta \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y),$$

где $\Rightarrow_\Delta$ - R-импликация по T-норме Δ.

В определении 6.4 $\widetilde{\mathfrak{R}}(x, y)$ - нечеткое отношение, описывающее *в целом (!)* имеющуюся базу нечетких правил. Любое из правил вывода может быть использовано для извлечения информации из базы нечетких правил. Критерий выбора правила – адекватность отклика системы реальным ожиданиям. Как ранее уже отмечалось, если правила базы содержат два или более антецедентов, то они рассматриваются как сложный антецедент:

ЕСЛИ x есть $\widetilde{A}_i$ И y есть $\widetilde{B}_i$, ТО z есть $\widetilde{C}_i$, $(i = \overline{1, n})$,
фактически: x есть $\widetilde{A}'$ И y есть $\widetilde{B}'$,
вывод: z есть $\widetilde{C}'$,

где $\widetilde{C}'$ определяется, например, на основе вывода Мамдани:

$$\widetilde{C}'(z) = (\widetilde{A}' \wedge \widetilde{B}') \circ \widetilde{\Re}(x,y,z) = \bigvee_{x\in X, y\in Y} \widetilde{A}'(x) \wedge \widetilde{B}'(y) \wedge \widetilde{\Re}(x,y,z).$$

Здесь $\widetilde{\Re}(x,y,z)$ - нечеткое отношение, описывающее базу нечетких правил в целом.

С точки зрения практического применения совершенно необходимо, чтобы система нечеткого вывода обладала *интерполяционным свойством* (*interpolation property*), то есть предоставляла возможность вывода в том случае, если фактическое значение антецедента на входе в систему не совпадает со значениями антецедентов, присутствующих в базе правил.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение. Пусть задан вывод Мамдани на базе нечетких правил Мамдани:

$$\widetilde{B}'(y) = \bigvee_{x\in X} \widetilde{A}'(x) \wedge \widetilde{\Re}(x,y),$$

$$\widetilde{\Re}(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i(x) \wedge \widetilde{B}_i(y),$$

так, что:

- для любого $i = \overline{1,n}$ существует такой $x_i \in X$, что $\widetilde{A}_i(x_i) = 1$, то есть $\widetilde{A}_i$ – нормальные НМ;

- два любых различных антецедента базы правил имеют непересекающиеся носители, т.е. $supp(\widetilde{A}_i) \cap supp(\widetilde{A}_j) = \varnothing,\ (\forall i \neq j)$.

Тогда выполняется интерполяционное свойство, т.е. ЕСЛИ $\widetilde{A}' = \widetilde{A}_j$, ТО $\widetilde{B}' = \widetilde{B}_j,\ \forall j = \overline{1,n}.$

► Приведем доказательство.

$$\widetilde{B}'(y) = \bigvee_{x\in X} \widetilde{A}_j(x) \wedge \widetilde{\Re}(x,y) = \bigvee_{x\in X} \widetilde{A}_j(x) \wedge \bigvee_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i(x) \wedge \widetilde{B}_i(y) =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{x\in X} \widetilde{A}_j(x) \wedge \widetilde{A}_i(x) \wedge \widetilde{B}_i(y) = \bigvee_{i=1}^{n} \widetilde{B}_i(y) \wedge \bigvee_{x\in X} \widetilde{A}_j(x) \wedge \widetilde{A}_i(x).$$

Однако в силу того, что $\widetilde{A}_i$ и $\widetilde{A}_j$ имеют непересекающиеся носители, то $\bigvee_{x\in X} \widetilde{A}_j(x) \wedge \widetilde{A}_i(x) = \delta_{ij}$ - символ Кронекера. Тогда

$$\widetilde{B}'(y) = \bigvee_{i=1}^{n} \widetilde{B}_i(y) \wedge \delta_{ij} = \widetilde{B}_j(y). \ ◄$$

Вопросы и упражнения к разделу 6

1. Что такое лингвистическая переменная? Приведите пример.
2. Что такое нечеткое правило, база нечетких правил? Какие их виды вам известны?
3. Что такое композиционное правило вывода? Перечислите известные вам правила.
4. Пусть дано нечеткое правило

   ЕСЛИ x есть $\widetilde{A}$, ТО y есть $\widetilde{B}$,

   где нечеткие множества $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ заданы на дискретных универсумах $X, Y = \{1,2,3,4,5\}$:

   $$\widetilde{A}(x) = \frac{0,2}{1} + \frac{0,7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,7}{4} + \frac{0,2}{5},$$
   $$\widetilde{B}(y) = \frac{0}{1} + \frac{0,5}{2} + \frac{0,8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,5}{5}.$$

   Запишите нечеткие правила Мамдани и Гёделя, связанные с данными нечеткими множествами. Запишите нечеткие логические выводы Мамдани и Гёделя, ассоциированные с соответствующими нечеткими правилами. Для антецедента

   $$\widetilde{A}'(x) = \frac{0,1}{1} + \frac{0,7}{2} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,2}{4} + \frac{0}{5}$$

   найдите консеквент $\widetilde{B}'(y)$, используя выводы Мамдани и Гёделя с соответствующими правилами (учтите, что каждый вывод может сочетаться с любым правилом).
5. Пусть дано нечеткое правило

   ЕСЛИ x есть $\widetilde{A}$, ТО y есть $\widetilde{B}$,

   где нечеткие множества $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ заданы на непрерывных универсумах $X = [0, 10]$ и $Y = [0, 100]$ соответственно как треугольные НЧ $\widetilde{A} = tr[3,5,6]$, $\widetilde{B} = tr[10,20,30]$. Запишите нечеткое правило Мамдани, связанное с данными нечеткими числами, и изобразите его графически. Запишите нечеткий вывод Мамдани, связанный с этим правилом. Найдите консеквент $\widetilde{B}'(y)$, если антецедентом является нечеткое число $\widetilde{A}'(x) = tr[2,3,4]$.

6. Решите предыдущую задачу при условии, что $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – трапециевидные НЧ $\widetilde{A} = tz[3,5,6,8]$, $\widetilde{B} = tz[10,20,30,40]$, а новым антецедентом является нечеткий синглтон $\widetilde{A}'(x) = \chi\{4\}$.
7. Составьте нечеткую базу правил Гёделя для примера 6.3. Изобразите графически полученное нечеткое отношение.
8. Запишите нечеткую базу правил и систему нечеткого вывода для задачи наполнения резервуара водой. Например, возможные антецеденты: уровень воды низкий, средний, высокий; возможные консеквенты: скорость подачи воды высокая, средняя, низкая. Обоснуйте свой выбор.
9. Создайте систему нечеткого вывода для персонажа в компьютерной игре, который пытается скрыться от неприятелей. Учтите, что враги могут находиться близко или далеко от персонажа, могут при этом приближаться, оставаться неподвижными или удаляться. Сам персонаж может предпринимать следующие действия: оставаться в покое, удаляться от врагов быстро или медленно. Обоснуйте выбор типа нечеткой базы правил и типа логического вывода.
10. Рассматривается нечеткое правило Ларсена с выводом Мамдани:

$$\widetilde{B}'(y) = \bigvee_{x \in X} \widetilde{A}'(x) \wedge \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y), \quad \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y) = \widetilde{A}(x) \cdot \widetilde{B}(y).$$

Докажите, что если $\widetilde{A}$ нормальное НМ, то такая система вывода обладает интерполяционным свойством: если $\widetilde{A}' = \widetilde{A}$, то $\widetilde{B}' = \widetilde{B}$.
11. Пусть заданы нечеткая база правил Ларсена с выводом Мамдани:

$$\widetilde{B}'(y) = \bigvee_{x \in X} \widetilde{A}'(x) \wedge \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y), \quad \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y) = \bigvee_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i(x) \cdot \widetilde{B}_i(y).$$

Докажите, что если $\widetilde{A}_i$ – нормальные НМ, имеющие непересекающиеся попарно носители, то такая система вывода обладает интерполяционным свойством.
12. Имеется нечеткая база правил Гёделя с выводом Мамдани:

$$\widetilde{B}'(y) = \bigvee_{x \in X} \widetilde{A}'(x) \wedge \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y), \quad \widetilde{\mathfrak{R}}(x, y) = \bigwedge_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i(x) \Rightarrow \widetilde{B}_i(y).$$

Докажите, что если $\widetilde{A}_i$ – нормальные нечеткие множества и $\widetilde{A}' = \widetilde{A}_j$, то $\widetilde{B}' \subseteq \widetilde{B}_j$.

13. Мистер Джон Смит был застрелен в своем доме. Первым труп Смита обнаружил его друг мистер Кэрри. Детектив лейтенант Коломбо подозревает мистера Кэрри в совершении убийства. Кэрри дал следующие показания: «Я выехал из дома около 6:30 и был у дома Смита примерно в 7 часов, обнаружил Джона мертвым и немедленно направился к телефонной будке позвонить в полицию. Они попросили меня оставаться на месте и немедленно подъехали». Между тем лейтенант Коломбо обнаружил следующие очевидные факты: мистер Смит был в дорогом костюме, а его наручные часы показывали 5:45. Заметных следов борьбы с убийцей на одежде и теле Джона не наблюдалось. Инспектор исследовал двигатель машины Кэрри и обнаружил его более или менее холодным. Проанализировав все имеющиеся у него факты, Коломбо пришел к выводу о причастности мистера Кэрри к убийству. Попробуйте и вы сделать свой вывод, сформулировав соответствующие нечеткие правила. Один из вариантов решения этой задачи можно найти в [8, с. 99-101].

7. ЭЛЕМЕНТЫ НЕЧЕТКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В предыдущем разделе мы вполне детально рассмотрели особенности нечеткого вывода. Вообще систему нечеткого вывода можно рассматривать как некоторый преобразователь (черный ящик), на вход которого подается нечеткий сигнал (в виде нечеткого множества или лингвистической переменной), а на выходе формируется нечеткий отклик.

На практике зачастую имеет место другая ситуация: на вход системы поступает «четкий» цифровой сигнал, например от измерительных приборов, и после преобразований также требуется получить четкий сигнал, который будет определять режим работы исполнительных устройств.

В таком случае невольно возникает вопрос о целесообразности применения нечетких систем. Действительно, если входные и выходные сигналы обычные четкие числа, то связь между ними может быть описана на языке классических функциональных связей. Да, может. Но эта связь, как правило, недоступна исследователю в виде аналитической формулы или известна лишь частично. Оказывается, что именно нечеткие системы способны восполнить эти информационные «пробелы» и с необходимой точностью спрогнозировать выходной сигнал в ответ на произвольное входное воздействие. Это утверждение обосновано известной теоремой Б. Коско о нечеткой аппроксимации (fuzzy approximation theorem – FAT), обсуждавшейся в части 1 данного пособия [4, с. 11]. Существуют и другие многочисленные исследования в области аппроксимационных качеств нечетких систем, например [9,10,16,24,18]. Однако вряд ли можно считать эти исследования исчерпывающими, так как сами по себе системы нечеткого вывода представляют собой весьма сложные нелинейные преобразователи, базирующиеся на операциях типа max, min, нечеткой импликации и др.

Для простоты понимания ограничим наше рассмотрение нечеткими системами типа SISO (*single input – single output*), то есть системами с единственным входом и единственным выходом.

В общих чертах принцип работы таких систем можно описать следующим образом. На единственный вход системы подается четкий сигнал, после чего производится его фаззификация, т.е. сигнал преобразуется в нечеткое множество. Оно в свою очередь поступает в качестве антецедента в систему нечеткого вывода, связанную с базой нечетких правил. Выполняется логический вывод нечеткого консеквента, то есть выходного НМ, которое затем дефаззифицируется, то есть преобразуется в четкий выходной сигнал. Такого типа системы часто называют нечеткими контроллерами (*fuzzy controllers*).

Схема нечеткой SISO-системы представлена на рис. 7.1.

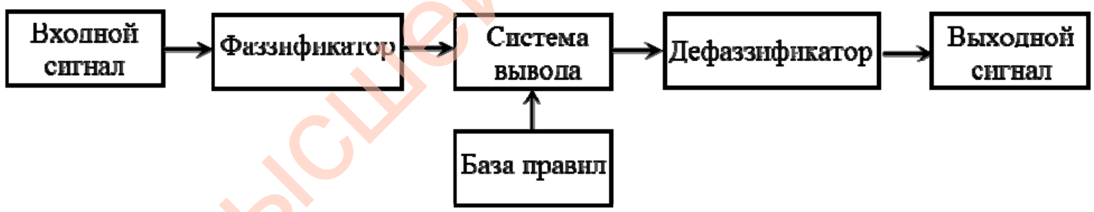


Рис. 7.1 Структура нечеткой SISO-системы

Рассмотрим подробнее каждый из ее компонентов.

Фаззификатор (*fuzzifier*). Пусть $x_0 \in X$ – четкий сигнал, то есть обычное число. Это происходит, например, если на вход системы управления подается цифровой сигнал. С точки зрения теории нечетких множеств это нечеткий синглтон, то есть НМ с функцией принадлежности импульсного типа:

$$\widetilde{A}'(x) = tr[x_0, x_0, x_0] = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_0 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если же входной сигнал содержит неопределенность (например, поступает с аналоговых датчиков), то можно использовать обычные типовые НМ для их представления. В таком случае фаззификация не требуется.

База нечетких правил (*fuzzy rule base*). Обычно реализуется в виде нечеткого отношения $\widetilde{\mathfrak{R}}(x,y)$. Выбор вида базы правил (Мамдани, Ларсена, Гёделя или иное) осуществляется разработчиком системы исходя из анализа предметной области. Существуют различные методы составления баз нечетких правил, но их рассмотрение выходит за рамки данного пособия. Интересующийся читатель может самостоятельно ознакомиться с материалами по ключевым словам «системы искусственного интеллекта», «нейронные сети». Отметим лишь только, что база правил должна быть непротиворечивой и достаточно полной. Ее можно пополнять в процессе наблюдения за откликом системы, то есть производить процесс «обучения».

Система нечеткого вывода (*fuzzy inference system*). Эта система предназначена для формирования нечеткого выходного сигнала в ответ на нечеткий входной сигнал. Здесь также имеется возможность выбора правил вывода (нечеткий вывод Мамдани, Гёделя и др.), причем любое из правил вывода может сочетаться с любым типом базы правил. Напомним, например, что вывод Мамдани осуществляется через максиминную композицию:

$$\widetilde{B}'(y) = \widetilde{A}'(x) \circ \widetilde{\mathfrak{R}}(x,y) = \bigvee_{x \in X} \widetilde{A}'(x) \wedge \widetilde{\mathfrak{R}}(x,y).$$

Напомним также, что система вывода должна обладать интерполяционными возможностями, то есть выдавать консеквент даже в тех случаях, когда в базе нечетких правил отсутствует правило для обработки антецедента $\widetilde{A}'$.

Дефаззификатор (*defuzzifier*). Это завершающий блок нечеткой системы SISO, предназначение которого состоит в преобразовании нечеткого консеквента в четкое число, которое может быть использовано для управления исполнительными устройствами. Существуют различные методы дефаззификации, то есть получения характерной четкой оценки для нечеткого множества. Рассмотрим лишь некоторые из них.

1. *Метод центра тяжести* (*center of gravity method*, *COG*).

Из названия ясно, что четкое значение является центром тяжести НМ в смысле среднего интегрального значения

$$COG(\widetilde{B}') = \frac{\displaystyle\int_{supp(\widetilde{B}')} y \cdot \mu_{\widetilde{B}'}(y)dy}{\displaystyle\int_{supp(\widetilde{B}')} \mu_{\widetilde{B}'}(y)dy},$$

где $\mu_{\widetilde{B}'}(y)$ – функция принадлежности нечеткого консеквента $\widetilde{B}'$. Интегрирование производится по носителю НМ $\widetilde{B}'$. Если множество имеет дискретный носитель, то интегрирование заменяется суммированием.

2. *Метод центра площади* (*center of area method*, *COA*).

В рамках данного подхода четкое значение *a* является такой точкой носителя нечеткого консеквента $\widetilde{B}'$, которая делит его так, что

$$a = COA(\widetilde{B}') \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{a} \mu_{\widetilde{B}'}(y)dy = \int_{a}^{+\infty} \mu_{\widetilde{B}'}(y)dy,$$

то есть площади, ограниченные графиком функции принадлежности слева и справа от точки *a*, равны.

3. *Метод среднего из максимумов* (*mean of maxima method*, *MOM*).

Дефаззификатор формирует четкое выходное значение как среднее всех точек носителя консеквента, в которых степени принадлежности достигают своего максимума, то есть

$$MOM(\widetilde{B}') = \frac{\int_{y \in U_{\max}} y dy}{\int_{y \in U_{\max}} dy},$$

где $U_{\max} = \{y \in Y \mid \mu_{\widetilde{B}'}(y) = \max_{t \in Y} \mu_{\widetilde{B}'}(t)\}$. В дискретном случае интегрирование также заменяется суммированием.

Возникает вопрос, как влияет выбор правила нечеткого вывода на выходной сигнал в системе SISO, если антецедент на входе в систему – четкая величина? Ответ на данный вопрос дает следующее утверждение.

Утв. 7.1. Пусть $\widetilde{A}'(x) = \chi\{x_0\}$ – четкий антецедент в системе нечеткого вывода с некоторой базой нечетких правил $\widetilde{\mathfrak{R}}(x, y)$. В таком случае консеквент $\widetilde{B}'(y)$ одинаков вне зависимости от использованного правила нечеткого вывода (Мамдани, Ларсена, Гёделя и др.).

► Входящий антецедент представляем в виде нечеткого синглтона вида

$$\widetilde{A}'(x) = \chi\{x_0\} = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_0 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда для вывода Мамдани, например,

$$\widetilde{B}'(y)=\bigvee_{x\in X}\widetilde{A}'(x)\wedge\widetilde{\Re}(x,y)=\widetilde{A}'(x_0)\wedge\widetilde{\Re}(x_0,y)=$$

$$=1\wedge\widetilde{\Re}(x_0,y)=\widetilde{\Re}(x_0,y).$$

То же для вывода Ларсена:

$$\widetilde{B}'(y)=\bigvee_{x\in X}\widetilde{A}'(x)\cdot\widetilde{\Re}(x,y)=\widetilde{A}'(x_0)\cdot\widetilde{\Re}(x_0,y)=$$

$$=1\cdot\widetilde{\Re}(x_0,y)=\widetilde{\Re}(x_0,y).$$

Для других правил вывода доказательство аналогично. ◄

Практическое значение утверждения 7.1 существенно. Поскольку в системе SISO с четким входом алгоритм нечеткого вывода не влияет на результат, то последний зависит только от выбора типа базы правил. Следовательно, разумно выбрать самый простой способ вывода, который оформим в виде следующего утверждения.

Утв. 7.2. Пусть $\widetilde{A}'(x)=\chi\{x_0\}$ – четкий антецедент в системе нечеткого вывода с базой правил Мамдани:

$$\widetilde{\Re}_M(x,y)=\bigvee_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\wedge\widetilde{B}_i(y).$$

В таком случае консеквент $\widetilde{B}'(y)$ определяется по формуле

$$\widetilde{B}'(y)=\bigvee_{i=1}^{n}\alpha_i\wedge\widetilde{B}_i(y),$$

где $\alpha_i=\widetilde{A}_i(x_0)$ – степень выполнения (*firing strength* или *degree of fulfillment*) *i*-го правила базы нечетких правил при x_0.

► Пусть

$$\widetilde{A}'(x)=\chi\{x_0\}=\begin{cases}1, & \text{если } x=x_0\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

В силу утверждения 7.1 можно использовать любой из нечетких выводов. Пусть для определенности это будет вывод Мамдани. Тогда

$$\widetilde{B}'(y)=\bigvee_{x\in X}\widetilde{A}'(x)\wedge\widetilde{\Re}_M(x,y)=$$

$$=\bigvee_{x\in X}\widetilde{A}'(x)\wedge\bigvee_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\wedge\widetilde{B}_i(y)=\widetilde{A}'(x_0)\wedge\bigvee_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x_0)\wedge\widetilde{B}_i(y)=$$

$$=1\wedge\bigvee_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x_0)\wedge\widetilde{B}_i(y)=\bigvee_{i=1}^{n}\alpha_i\wedge\widetilde{B}_i(y),$$

где $\alpha_i=\widetilde{A}_i(x_0)$. ◄

Утверждения, аналогичные 7.2, можно доказать и для других типов баз нечетких правил. Читатель может проделать это самостоятельно в качестве упражнения.

С учетом сказанного можно предложить реализацию нечеткой системы SISO с четким входом в виде следующего алгоритма:

1) ввести четкое значение x_0;

2) вычислить степени выполнения каждого правила базы нечетких правил при заданном x_0, т.е. $\alpha_i = \widetilde{A}_i(x_0)$, $i = \overline{1,n}$;

3) для каждого $y \in Y$ составить выходное нечеткое множество, например: $\widetilde{B}'(y) = \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i \wedge \widetilde{B}_i(y)$ для базы правил типа Мамдани или $\widetilde{B}'(y) = \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \widetilde{B}_i(y)$ для базы правил типа Ларсена;

4) произвести дефаззификацию $\widetilde{B}'$, т.е. получить четкое выходное значение $y_0 = defuzz(\widetilde{B}')$.

Пример 7.1. Пусть задана нечеткая система SISO типа Мамдани с базой, состоящей из двух нечетких правил:

$$\text{ЕСЛИ } x \text{ есть } \widetilde{A}_i, \text{ТО } y \text{ есть } \widetilde{B}_i \ (i = 1,2),$$

где антецеденты и консеквенты заданы треугольными нечеткими числами:

$$\widetilde{A}_1 = tr[1,2,3], \ \widetilde{A}_2 = tr[2,3,4],$$
$$\widetilde{B}_1 = tr[2,4,6], \ \widetilde{B}_2 = tr[4,6,8].$$

Пусть на вход системы подан четкий сигнал $x_0 = 2,4$. Найти четкий выходной сигнал y_0, используя различные методы дефаззификации.

► Выпишем ФП антецедентов и консеквентов:

$$\widetilde{A}_1 = tr[1,2,3](x) = \begin{cases} x-1, \text{ если } 1 < x \le 2 \\ 3-x, \text{ если } 2 < x \le 3 \\ 0 \ \text{ иначе;} \end{cases}$$

$$\widetilde{A}_2 = tr[2,3,4](x) = \begin{cases} x-2, \text{ если } 2 < x \le 3 \\ 4-x, \text{ если } 3 < x \le 4 \\ 0 \ \text{ иначе;} \end{cases}$$

$$\widetilde{B_1}=tr[2,4,6](y)=\begin{cases}\frac{y}{2}-1, & \text{если } 2<y\le 4\\ 3-\frac{y}{2}, & \text{если } 4<y\le 6\\ 0 \ \text{иначе};\end{cases}$$

$$\widetilde{B_2}=tr[4,6,8](y)=\begin{cases}\frac{y}{2}-2, & \text{если } 4<y\le 6\\ 4-\frac{y}{2}, & \text{если } 6<y\le 8\\ 0 \ \text{иначе}.\end{cases}$$

Найдем степени выполнения нечетких правил при $x_0=2,4$:

$$\alpha_1=\widetilde{A_1}(x_0)=\widetilde{A_1}(2,4)=3-2,4=0,6;$$

$$\alpha_2=\widetilde{A_2}(x_0)=\widetilde{A_2}(2,4)=2,4-2=0,4.$$

Находим нечеткий консеквент:

$$\widetilde{B'}(y)=\bigvee_{i=1}^{2}\alpha_i\wedge\widetilde{B_i}(y)=\left(0,6\wedge\widetilde{B_1}(y)\right)\vee\left(0,4\wedge\widetilde{B_2}(y)\right).$$

Имеем

$$0,6\wedge\widetilde{B_1}(y)=\begin{cases}\frac{y}{2}-1, & \text{если } 2<y\le 3,2\\ 0,6, & \text{если } 3,2<y\le 4,8\\ 3-\frac{y}{2}, & \text{если } 4,8<y\le 6\\ 0 \ \text{иначе},\end{cases}$$

$$0,4\wedge\widetilde{B_2}(y)=\begin{cases}\frac{y}{2}-2, & \text{если } 4<y\le 4,8\\ 0,4, & \text{если } 4,8<y\le 7,2\\ 4-\frac{y}{2}, & \text{если } 7,2<y\le 8\\ 0 \ \text{иначе},\end{cases}$$

$$\widetilde{B}'(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{2}-1, & \text{если } 2<y\le 3,2\\ 0,6, & \text{если } 3,2<y\le 4,8\\ 3-\dfrac{y}{2}, & \text{если } 4,8<x\le 5,2\\ 0,4, & \text{если } 5,2<x\le 7,2\\ 4-\dfrac{y}{2}, & \text{если } 7,2<x\le 8\\ 0 \text{ иначе.}\end{cases}$$

Результат представлен на рис. 7.2.

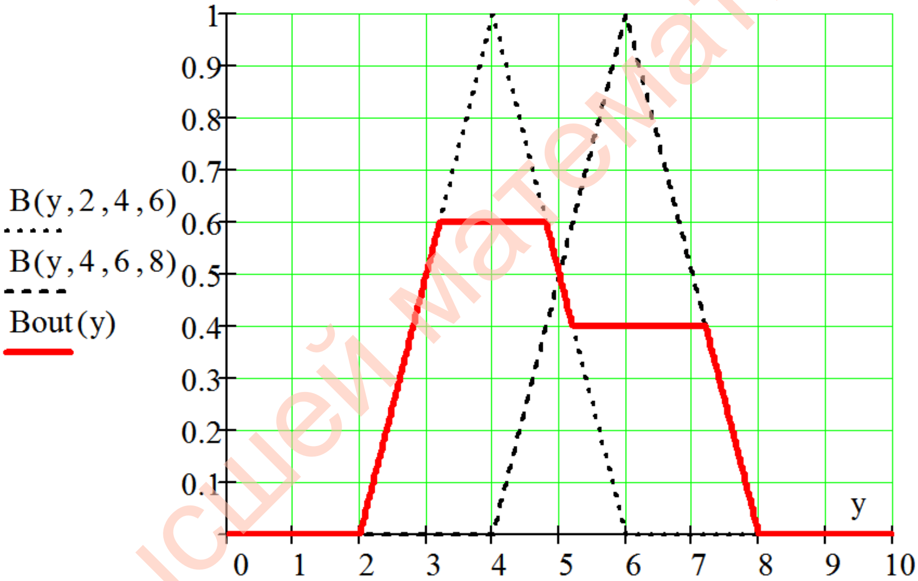


Рис. 7.2. К примеру 7.1. ФП нечеткого консеквента $\widetilde{B}'(y)$

Читатель, вероятно, обратил внимание на сложность выполнения таких операций вручную. Разумеется, значительно проще решить данный пример, используя программу MathCad. Приведем здесь фрагменты рабочего листа MathCad с расчетами по данному заданию.

$$A(x,a,b,c) := \begin{vmatrix}\dfrac{x-a}{b-a} & \text{if } a < x \le b\\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{if } b < x < c\\ 0 & \text{otherwise}\end{vmatrix} \qquad B(y,a,b,c) := A(y,a,b,c)$$

$x0 := 2.4 \quad \alpha 1 := A(x0,1,2,3) = 0.6 \quad \alpha 2 := A(x0,2,3,4) = 0.4$

$\mathrm{Bout}(y) := \max(\min(0.6, B(y,2,4,6)), \min(0.4, B(y,4,6,8)))$.

Дефаззификацию проведем тремя методами.

А. Методом центра тяжести:

$$COG\left(\widetilde{B}'\right) = \frac{\int\limits_{supp\left(\widetilde{B}'\right)} y \cdot \mu_{\widetilde{B}'}(y)dy}{\int\limits_{supp\left(\widetilde{B}'\right)} \mu_{\widetilde{B}'}(y)dy}.$$

Применяя MathCad, получаем

$$COG := \frac{\int_2^8 y \cdot \mathrm{Bout}(y)\,dy}{\int_2^8 \mathrm{Bout}(y)\,dy} = 4.839.$$

Б. Методом среднего максимумов:

$$MOM\left(\widetilde{B}'\right) = \frac{\int\limits_{y \in U_{\max}} y dy}{\int\limits_{y \in U_{\max}} dy} = \frac{\left.\frac{y^2}{2}\right|_{3,2}^{4,8} + \left.\frac{y^2}{2}\right|_{5,2}^{7,2}}{(4,8-3,2)+(7,2-5,2)} = 5,222,$$

где $U_{\max} = \left\{ y \in Y \mid \mu_{\widetilde{B}'}(y) = \max\limits_{t \in Y} \mu_{\widetilde{B}'}(t) \right\}$.

В. Методом центра площади:

$$m = COA\left(\widetilde{B}'\right) \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{m} \mu_{\widetilde{B}'}(y)dy = \int\limits_{m}^{+\infty} \mu_{\widetilde{B}'}(y)dy.$$

Применяя MathCad, получаем

$m := 2$

Given

$$\int_2^m \mathrm{Bout}(y)\,dy = \int_m^8 \mathrm{Bout}(y)\,dy$$

$\mathrm{Find}(m) = 4.667$. ◄

Замечание. Если нечеткие правила содержат составные антецеденты, то утверждение 7.2 по-прежнему остается справедливым. Действительно, пусть

$$\mathfrak{R}(x,y,z)=\bigvee_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\wedge\widetilde{B}_i(y)\wedge\widetilde{C}_i(z),$$

а четкий сигнал на входе (x_0,y_0), тогда

$$\widetilde{C}'(z)=\bigvee_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x_0)\wedge\widetilde{B}_i(y_0)\wedge\widetilde{C}_i(z)=\bigvee_{i=1}^{n}\alpha_i\wedge\widetilde{C}_i(z),$$

где $\alpha_i=\widetilde{A}_i(x_0)\wedge\widetilde{B}_i(y_0)$ – степень выполнения i-го правила при (x_0,y_0) в нечеткой базе правил.

Перейдем к рассмотрению аппроксимационных свойств нечетких SISO-систем.

Пусть имеется некоторая непрерывная вещественная функция $f:[a,b]\to[c,d]$. Выполним разбиение отрезка $[a,b]$ вида $a=x_0<x_1<\ldots<x_n<x_{n+1}=b$ с мелкостью $\delta=\sup\limits_{i=1,\ldots,n+1}(x_i-x_{i-1})$. Обозначим значения функции в точках разбиения $y_i=f(x_i)$, $i=\overline{0,(n+1)}$.

Теперь попробуем создать SISO-систему, которая с некоторой точностью воспроизводит функциональную зависимость $y=f(x)$ при $x\in[a,b]$. Пусть антецедентная часть базы правил этой системы – нормальные нечеткие множества $\widetilde{A}_i$ $(i=\overline{1,n})$ с носителями $supp\widetilde{A}_i=[x_{i-1},\,x_{i+1}]$ соответственно. Интерпретировать эти множества можно так: $\widetilde{A}_i$ – означает, что «величина x – приблизительно x_i». Также полагаем, что они задаются непрерывными ФП, причем $\mu_{\widetilde{A}_i}(x_i)=1$ $(i=\overline{1,n})$.

Консеквентную часть базы правил составляют НМ $\widetilde{B}_i$ $(i=\overline{1,n})$ с носителями $supp\widetilde{B}_i=[\min(y_{i-1},y_i,\,y_{i+1}),\max(y_{i-1},y_i,\,y_{i+1})]$. Дополнительно полагаем их ФП интегрируемыми и $\mu_{\widetilde{B}_i}(y_i)=1$. То есть нечеткое множество $\widetilde{B}_i$ – это модель выражения «значение y – приблизительно y_i».

В описанных терминах база правил нечеткой аппроксимации функции $y = f(x)$ будет

$$\text{ЕСЛИ } x \text{ есть } \widetilde{A}_i, \text{ТО } y \text{ есть } \widetilde{B}_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Далее для определенности будем рассматривать нечеткую SISO-систему с базой правил Мамдани и методом дефаззификации COG. В таком случае нечеткий консеквент рассчитывается как

$$\widetilde{B}'(y) = \bigvee_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i(x) \wedge \widetilde{B}_i(y),$$

а затем дефаззифицируется по формуле

$$COG\left(\widetilde{B}'\right) = \frac{\int_c^d y \cdot \mu_{\widetilde{B}'}(y)dy}{\int_c^d \mu_{\widetilde{B}'}(y)dy}.$$

Из двух приведенных соотношений следует, что аппроксимация F функции f в системе SISO будет

$$F(f,x) = \frac{\int_c^d \left[\bigvee_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i(x) \wedge \widetilde{B}_i(y)\right] \cdot ydy}{\int_c^d \left[\bigvee_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i(x) \wedge \widetilde{B}_i(y)\right] dy}.$$

Для облегчения понимания выкладок здесь и далее будем считать взаимозаменяемыми символы нечеткого множества и его функции принадлежности. Скажем, в вышеприведенной формуле $\widetilde{A}_i(x)$ и $\widetilde{B}_i(y)$ следует понимать как функции принадлежности этих множеств $\mu_{\widetilde{A}_i}(x)$ и $\mu_{\widetilde{B}_i}(y)$ соответственно.

Так как $\widetilde{A}_i$ заданы непрерывными ФП, а $\widetilde{B}_i$ интегрируемыми, то из свойств определенного интеграла следует, что и $F(f,x)$ непрерывна. Можно показать, что ошибка аппроксимации при этом

$$\left|F(f,x) - f(x)\right| \le 3\omega(f,\delta),$$

где ω – модуль непрерывности функции f.

Пояснение. Для любой функции f, определённой на множестве E, модуль непрерывности – это функция, по определению равная

$$\omega(f,\delta) = \sup\left\{\left|f(x_1) - f(x_2)\right| : (x_1, x_2 \in E) \wedge \left|x_1 - x_2\right| < \delta\right\},$$

то есть верхней грани колебания функции по всем отрезкам из E длиной меньше δ.

Доказательство последнего утверждения читатель может найти в работе [8, с. 115-116]. Для нас достаточно лишь понимания того, что SISO-система может аппроксимировать любую непрерывную функцию при помощи базы нечетких правил с любой заданной наперед точностью. Точность аппроксимации среди прочего зависит от мелкости разбиения δ, которая, в свою очередь, обратно пропорциональна количеству правил в базе.

Помимо нечеткого логического вывода Мамдани большое распространение получил иной подход, известный как *нечеткий вывод Такаги – Сугено* (*Takagi – Sugeno fuzzy inference*). Система SISO Такаги – Сугено (TS) построена на основе базы правил, также состоящей из антецедентов лингвистического типа, но консеквентов, представляющих собой кусочно-линейные четкие функции. Следовательно, дефаззификация на выходе системы TS не требуется.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ЕСЛИ } x \text{ есть } \widetilde{A}_i,\ \text{ТО } y = a_i x + b_i,\ (i = \overline{1,n}),\\ \text{фактически: } x \text{ есть } x_0,\\ \text{вывод: } y \text{ есть } y_0.\end{array}}$$

Нечеткие контроллеры TS-типа не используют логический вывод (например, Мамдани, Гёделя или др.). Требуется лишь вычислить степени выполнения нечетких правил. В целом алгоритм функционирования TS-системы SISO следующий:

1) ввести четкое значение x_0;

2) вычислить степени выполнения каждого правила базы нечетких правил, т.е. $\alpha_i = \widetilde{A}_i(x_0)$;

3) рассчитать выводы по каждому индивидуальному правилу $y_i = a_i x_0 + b_i$;

4) получить выходное значение, произведя *агрегацию*:

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Система SISO типа TS с двумя и более антецедентами имеет, например, следующий вид:

ЕСЛИ x есть $\widetilde{A}_i$ И y есть $\widetilde{B}_i$, ТО $z = a_i x + b_i y + c$, $(i = \overline{1,n})$,   фактически: x есть x_0 и $y = y_0$,   вывод: z есть z_0

В этом случае алгоритм нечеткого вывода будет следующим:

1) ввести четкие значения x_0, y_0;

2) вычислить степени выполнения каждого правила нечеткой базы правил, т.е. $\alpha_i = \widetilde{A}_i(x_0) \wedge \widetilde{B}_i(y_0)$;

3) рассчитать выводы по каждому индивидуальному правилу $z_i = a_i x_0 + b_i y_0 + c_i$;

4) выполнить агрегацию

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Пример 7.2. Пусть задана нечеткая система SISO типа TS с нечеткой базой, состоящей из двух правил:

ЕСЛИ x большой И y маленький, ТО $z_1 = x + 2y$.

ЕСЛИ x средний И y средний, ТО $z_2 = x - y$.

Пусть на вход системы подан четкий сигнал $(x_0, y_0) = (5,\ 2)$. Известно, что $\widetilde{A}_S = tz[0,0,1,3]$, $\widetilde{A}_M = tr[1,2,6]$, $\widetilde{A}_B = tz[4,7,10,10]$ – множества, соответствующие термам *Small* (маленький), *Medium* (средний), *Big* (большой) соответственно. Найти выходной сигнал z_0.

► Вычислим степени выполнения правил при $(x_0, y_0) = (5,\ 2)$:

$$\alpha_1 = \min\left(\frac{1}{3};\ 0{,}5\right) = \frac{1}{3}; \quad \alpha_2 = \min\left(\frac{1}{4};\ 1\right) = \frac{1}{4}.$$

Рассчитаем выводы по каждому правилу:

$$z_1 = x_0 + 2y_0 = 5 + 2 \cdot 2 = 9; \qquad z_2 = x_0 - y_0 = 5 - 2 = 3.$$

Произведя агрегацию, находим выходной сигнал:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{2} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{2} \alpha_i} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{1}{4} \cdot 3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} \approx 6{,}4. \ ◄$$

Можно расширить возможности TS-систем, если в консеквентной части базы правил применять не линейные функции, а полиномы *n-й* степени. Системы типа Takagi – Sugeno также обладают хорошими аппроксимационными свойствами.

Вопросы и упражнения к разделу 7

1. Опишите структуру системы нечеткого вывода типа SISO. Поясните назначение отдельных ее компонентов.
2. Что такое фаззификация, дефаззификация?
3. Какие методы дефаззификации вам известны, в чем их суть?
4. Как влияет выбор правила нечеткого вывода на выход в системе SISO, если антецедент на входе в систему – четкая величина?
5. Приведите описание системы нечеткого вывода SISO типа Мамдани. Охарактеризуйте ее аппроксимационные свойства.
6. Опишите систему нечеткого вывода SISO типа Takagi – Sugeno.
7. Дано треугольное нечеткое число $\tilde{u} = tr[a,b,c]$. Получите его ожидаемое значение при помощи методов дефаззификации COG и COA. Сравните результаты.
8. Выполните задание 7 для трапециевидного нечеткого числа $\tilde{u} = tz[a,b,c,d]$.
9. Пусть задана SISO-система нечеткого вывода с базой нечетких правил типа Мамдани с двумя антецедентами $\widetilde{A_1} = tr[1,3,5]$, $\widetilde{A_2} = tr[3,5,7]$ и двумя консеквентами $\widetilde{B_1} = tr[5,10,15]$, $\widetilde{B_2} = tr[10,15,20]$. На вход системы подают два четких сигнала: сначала $x_0 = 4$, а затем $x_1 = 3,5$. Найдите степени выполнения нечетких правил и нечеткий отклик системы $\widetilde{B'}$ в каждом случае. Сравните полученные результаты. Изменятся ли они, если при той же базе правил вместо вывода Мамдани использовать вывод Гёделя?
10. Рассмотрите нечеткую систему SISO типа TS с базой правил

$$\text{ЕСЛИ } x \text{ есть } \widetilde{A_1} \text{ И } y \text{ есть } \widetilde{B_1}, \text{ ТО } z = 3x - 2y,$$

$$\text{ЕСЛИ } x \text{ есть } \widetilde{A_2} \text{ И } y \text{ есть } \widetilde{B_2}, \text{ ТО } z = x + 2y,$$

где $\widetilde{A_1} = tr[1,3,5]$, $\widetilde{A_2} = tz[2,3,6,8]$, $\widetilde{B_1} = tr[2,4,5]$, $\widetilde{B_2} = tz[1,4,5,6]$.

На вход системы подан четкий сигнал $(x_0, y_0) = (4,3)$. Найдите выходной сигнал z_0.

11. Создайте модель управления температурой воздуха в помещении в виде нечеткой системы SISO (по данным примеров 6.2 и 6.3 предыдущего раздела). На вход системы поступает четкое значение температуры t_0, а на выходе формируется четкое значение интенсивности нагрева. Проверьте работу системы, задав несколько различных значений температуры воздуха на входе и изучив соответствующий отклик. Для удобства моделирования можно использовать доступную вам систему компьютерной математики, например MathCad.
12. Постройте математическую модель нечеткого контроллера для стиральной машины, определяющего необходимое количество стирального порошка в зависимости от мутности отводимой воды W, усл.%, и выбранной пользователем длительности стирки T, мин. Термы для W: $NW = \widetilde{A_1} = tr[0,0,50]$ - чистая вода, $LW = \widetilde{A_2} = tr[0,50,100]$ – вода малой мутности, $HW = \widetilde{A_3} = tr[50,100,100]$ – вода высокой мутности. Термы для времени стирки: $LT = \widetilde{B_1} = tr[0,0,10]$ – малой продолжительности, $MT = \widetilde{B_2} = tr[0,10,30]$ – средней продолжительности, $HT = \widetilde{B_3} = tr[30,60,60]$ – большой продолжительности. База нечетких правил задана в виде таблицы,

Мутность воды, $\widetilde{A_i}$	Продолжительность стирки, $\widetilde{B_i}$		
	LT	MT	HT
NW	$\widetilde{C_1}$	$\widetilde{C_1}$	$\widetilde{C_1}$
LW	$\widetilde{C_4}$	$\widetilde{C_3}$	$\widetilde{C_2}$
HW	$\widetilde{C_5}$	$\widetilde{C_4}$	$\widetilde{C_3}$

где термы $\widetilde{C_i}$ описывают долю забора стирального порошка из контейнера, %: порошок почти не берется – $\widetilde{C_1} = tr[0,0,25]$, берется около четверти содержимого – $\widetilde{C_2} = tr[0,25,50]$, приблизительно половина – $\widetilde{C}_3 = tr[25,50,75]$, около трех четвертей содержимого – $\widetilde{C}_4 = tr[50,75,100]$, практически полностью – $\widetilde{C}_5 = tr[75,75,100]$.

Предположим, что мутность отходящей воды составила 60 %, а время стирки установлено на 15 мин. Применяя нечеткий вывод Мамдани, определить ручным счетом необходимое количество стирального порошка. Затем, применяя MathCad (или иную систему компьютерной математики), проверить адекватность построенной системы нечеткого вывода, имитируя различные варианты.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТР МЭК 61131-7-2017. Контроллеры программируемые. Часть 7. Программирование нечеткого управления. Утвержден и введен в действие Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 15 сентября 2017 г. № 1127-ст.

2. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 166 с.

3. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление / А. Пегат: пер. с англ. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 798 с.: ил. – (Адаптивные и интеллектуальные системы).

4. Основы теории нечетких множеств. Часть 1: учеб. пособие / А.Н. Конюхов, А.Б. Дюбуа, А.С. Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2017. – 88 с.

5. Abu Aarqob, O.A., Shawagfeh, N.T. and AbuGhneim, O.A. (2008) Functions Defined on Fuzzy Real Numbers According to Zadeh's Extension // International Mathematical Forum, 3(16). P. 763–776.

6. Ban, A.I., Bede, B. Properties of the cross product of fuzzy numbers // Journal of Fuzzy Mathematics 14. P. 513–531 (2006).

7. Ban, A.I., Coroianu, L.C., Grzegorzewski, P. Trapezoidal approximation and aggregation // Fuzzy Sets and Systems 177. P. 45–59 (2011).

8. Bede, B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. – London: Springer, 2013. – 276 p.

9. Bede, B., Coroianu, L., Gal, S.G. Approximation and Shape Preserving Properties of the Bernstein Operator of Max-Product Kind // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2009, Article ID 590589 (2009), doi:10.1155/2009/590589.

10. Bede, B., Nobuhara, H., Dankova, M., Di Nola, A. Approximation by using pseudo-linear operators // Fuzzy Sets and Systems 159. P. 804–820 (2008).

11. De Barros L.C., Bassanezi R.C. A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics: Theory and Applications.– New York: Springer, 2016. – 304 p.

12. Dubois D., Prade H. Fuzzy Sets And Systems Theory And Applications. – New York: Academic Press, 1980.

13. Dubois, D., and Prade, H. Operations on fuzzy numbers // Int. J. Syst. Sci. 9 (1978). P. 613–626.

14. Dvorak, A., Novak, W. A Fuzzy Logic Model of Detective Reasoning // University of Ostrava, Institute for Research and Applications of Fuzzy Modeling, Research Report No. 99 (2006).

15. Klir, G. J., and Yuan, B. Fuzzy sets and fuzzy logic. Theory and applications. – New Jersey: Prentice Hall PTR, 1995.

16. Kóczy, L.T., Zorat, A. Fuzzy systems and approximation // Fuzzy Sets and Systems 85. P. 203–222 (1997).

17. Kosko, B. Fuzzy Systems as Universal Approximators // IEEE Transactions on Computers 43. P. 1329–1333 (1994).

18. Li, Y.-M., Shi, Z.-K., Li, Z.-H. Approximation theory of fuzzy systems based upon genuine many-valued implications-MIMO cases // Fuzzy Sets and Systems 130. P. 159–174 (2002).

19. Luciano Stefanini, Laerte Sorini. Fuzzy Arithmetic with Parametric LR Fuzzy Numbers // European Society of Fuzzy Logic and Technology Conference, Lisbon, Portugal. – 2009. – P. 600-605.

20. Mamdani, E.H., Assilian, S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller // J. Man Machine Stud. 7. P. 1–13 (1975).

21. McNeill F., Thro E. Fuzzy logic. A practical approach. – Boston: Academic Press, 1994. – 309 p.

22. R. Füller, T. Keresztfalvi. On generalization of Nguyen' theorem // Fuzzy Sets and Systems 41. P. 371–374. (1990).

23. Stefanini, L., Sorini, L., Guerra, M.L. Parametric representation of fuzzy numbers and application to fuzzy calculus // Fuzzy Sets and Systems 157. P. 2423–2455 (2006).

24. Tikk, D., Kóczy, L.T., Gedeon, T.D. A survey on universal approximation and its limits in soft computing techniques // International Journal of Approximate Reasoning 33. P. 185–202 (2003).

25. Zadeh, L.A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 3. P. 28–44 (1973).

26. Zimmermann H.-J. Fuzzy Set Theory and Its Applications. Allied Publishers, Kluwer Academic Publishers, 1992. – 407 p. – 2nd ed.

ПРИЛОЖЕНИЕ
АНГЛО-РУССКИЙ СЛОВАРЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ

α-cut – α-сечение или α-срез
antecedent – предпосылка (антецедент)
approximate reasoning – оценочное (нечеткое) рассуждение
approximation property – аппроксимационное свойство
cartesian product – декартово произведение
center of area method (COA) – метод центра площади
center of gravity method (COG) – метод центра тяжести
complement – дополнение
compositional rule of inference – композиционное правило вывода
conjunction – конъюнкция (логическое И)
consequent – следствие (консеквент)
continuous – непрерывный
convex set – выпуклое множество
core – ядро
crisp – четкий
De Morgan triplet – триплет де Моргана
degree of membership – степень принадлежности
discrete – дискретный
disjunction – дизъюнкция (логическое ИЛИ)
equivalence – эквивалентность
equivalence relation – отношение эквивалентности
extension principle – принцип обобщения
firing strength (degree of fulfillment) – степень выполнения
fuzzy approximation theorem – теорема о нечеткой аппроксимации
fuzzy control language (FCL) – язык нечеткого управления
fuzzy inference – нечеткий вывод
fuzzy logic – нечеткая логика
fuzzy logic controller (FLC) – контроллер на нечеткой логике
fuzzy number – нечеткое число
fuzzy relation – нечеткое отношение
fuzzy rule – нечеткое правило
fuzzy rule base – база нечетких правил
fuzzy set – нечеткое множество
fuzzy singleton – нечеткий синглтон (импульсное НЧ)
fuzzy subset – нечеткое подмножество
fuzzy variable – нечеткая переменная
generalized modus ponens – обобщенный модус поненс
grammar – множество грамматических правил

Hukuhara difference, H-difference – разность Хукухары
implication – импликация
index of fuzziness – индекс нечеткости
interpolation property – интерполяционное свойство
intersection – пересечение
inverse – обратный
linguistic hedge – лингвистический модификатор (хедж)
linguistic variable – лингвистическая переменная
Mamdani fuzzy inference – нечеткий вывод Мамдани
max-min composition – максиминная композиция
mean of maxima method (MOM) – метод среднего из максимумов
membership function – функция принадлежности
multiple input single output (MISO) system – система со множественным входом и единственным выходом
negation – отрицание
rule of inference – правило вывода
semantics – множество семантических правил
shape function – функция формы
single input single output (SISO) system – система с единственным входом и единственным выходом
soft computing – мягкие вычисления
strict negation – строгое отрицание
strong negation – сильное отрицание
support – носитель
Takagi – Sugeno fuzzy inference – нечеткий вывод Такаги – Сугено
the law of the excluded middle – закон исключения третьего
the measure of fuzziness – мера нечеткости
transition point – точка перехода
triangular conorm – треугольная конорма (Т-конорма)
triangular norm – треугольная норма (Т-норма)
truth table – таблица истинности
union – объединение
vagueness – неопределенность, расплывчатость

К о н ю х о в Алексей Николаевич
Д ю б у а Александр Борисович
С а ф о ш к и н Алексей Сергеевич

Основы теории нечетких множеств. Часть 2

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 05.07.18. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 6,75.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.